513.013
Р-28

514.7(07)
Р28

П. К. РАШЕВСКИЙ

КУРС ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Проверено
1953

35671

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

БИБЛИОТЕКА ХАРЬКОВСК. ИНЖ. СТРОИТ. ИН-ТА
БП № 66680

Допущено Всесоюзным Комитетом по делам высшей школы при СНК СССР в качестве учебника для студентов математических факультетов государственных университетов

ПРОВЕРЕНО
1969

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1939 ЛЕНИНГРАД

514.013
Р728

П. К. РАШЕВСКИЙ

514.7(07)
Р28

КУРС

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать	По чьей вине
81	1 сн.	$\sqrt{dr^2+r^2\varphi^2}$,	$\sqrt{dr^2+r^2d\varphi^2}$,	Тип.
145	5 св.	$\frac{dt}{s}$	$\frac{dt}{ds}$	Тип.
161	14 сн.	$\sqrt{a^2+\lambda^2\varphi}$	$\sqrt{a^2+\lambda^2}\varphi$	Тип.
184	13 сн.	$(1-a\dot{k})$	$(1-ak)'$	Тип.
184	8 сн.	$(1-ak)'$	$(1-ak)$	Тип.
319	12 сн.	$k_{вн}$	$\widetilde{k}_{вн}$	Тип.
352	5 св.	$e^{2\sqrt{-K}u_0}$	$e^{2\sqrt{-K}u_0}$	Тип.

Зак. 1391. Рашевский, Курс дифференциальной геометрии.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1939 ЛЕНИНГРАД

Т 24—5—2
ТКК № 28

К ЧИТАТЕЛЮ.

Издательство просит присылать Ваши замечания и отзывы об этой книге по адресу: Москва, Проезд Владимирова, д. 4. Редакция технико-теоретической литературы ГОНТИ.

Редактор *Д. А. Райков.*
Техн. редактор *В. Зазульская.*
Сдано в производство 13/III 1939 г.
Подписано к печати 15/VII 1939 г.
Формат 60 × 92¹/₁₆.
Тираж 8000 экз.
Бум. листов 11¹/₄. Тип. зн. в 1 бум. л. 102400.

Печатных листов 22,5.
Учетно-авторских листов 26,6.
Учетный № 4747.
Издательский № 63.
Леноблгорлит № 3376.
Заказ № 1391.
Бумага Камского бумкомбината.

2-я типография ГОНТИ им. Евг. Соколовой, Ленинград, пр. Красных командиров, 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО 2-му ИЗДАНИЮ

Второе издание отличается от первого рядом редакционных изменений и введением в текст примеров и упражнений.

Читателю, который желал бы ограничиться минимальным материалом, можно дать следующие указания. В главах I — V можно опустить §§ 8, 32, 46. В главе VI наибольшую важность представляют §§ 47—50 и 53. Наконец, чтобы в главе VII ограничиться лишь понятием о параллельном перенесении и геодезических, достаточно усвоить §§ 56 (без формул Вейнгартена), 60, 61 (первую половину), 62 (без сносок) и 63 (без сносок).

В заключение я хотел бы выразить свою благодарность работникам кафедры диференциальной геометрии МГУ за большую помощь в деле улучшения этой книги, которую они мне оказали своими советами и замечаниями.

24/XII 1938 г. *П. Рашевский.*

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Предисловие . . . . . .
Введение . . . . . .

Глава I. Первоначальные сведения о кривых на плоскости

§ 1. Обыкновенные и особые точки плоской кривой 9
§ 2. Строение кривой вблизи обыкновенной точки 12
§ 3. Касательная и нормаль в обыкновенной точке. Декартовы координаты 16
§ 4. Касательная и нормаль в обыкиовенной точке. Параметрическое представление 21
§ 5. Касательная и нормаль в обыкновенной точке. Поляриые координаты 24
§ 6. Строение кривой вблизи особых точек 28
§ 7. Строение кривой вблизи особых точек. Изолированные и узловые точки, точки возврата 33
§ 8. Семейство кривых на плоскости вблизи данной точки 43
§ 9. Огибающая и геометрическое место особых точек 48
§ 10. Асимптоты 54

Глава II. Дифереицирование вектор-фуикций и его простейшие применения к теории кривых

§ 11. Определение производной и техинка диференцирования 61
§ 12. Истолкование вектор-функции как радиуса-вектора кривой в параметрическом представлении 67
§ 13. Геометрический смысл диференцирования вектор-функции 70
§ 14. Ряд Тэйлора для вектор-функции 74
§ 15. Длиа дуги как параметр 77
§ 16. Касание кривых 82

Глава III. Теория кривизны плоских кривых

§ 17. Касание плоских кривых и соприкасающаяся окружность 89
§ 18. Соприкасающаяся окружиость с векторной точки зрения 99
§ 19. Кривизиа 105
§ 20. Формулы Френе 108
§ 21. Эволюта 111
§ 22. Эвольвента 116
§ 23. Натуральное уравнение кривой 118

Глава IV. Теория кривизны пространственных кривых

§ 24. Касательные; нормали 126
§ 25. Касание кривой с поверхностью 132
§ 26. Соприкасающаяся плоскость 135
§ 27. Соприкасающаяся окружность. Трехгранник Френе 141
§ 28. Кривизна 146
§ 29. Формулы Френе. Кручение 149
§ 30. Вычислительные формулы для кривизны и кручения 156
§ 31. Строение кривой вблизи данной точки 162
§ 32. Соприкасающаяся сфера 168
§ 33. Натуральные уравнения 173

Глава V. **Первоначальные сведения по теории поверхностей**

§ 34. Криволинейные координаты на поверхности 185
§ 35. Кривые на поверхности 190
§ 36. Первая основная квадратичная форма 193
§ 37. Вторая основная квадратичная форма и кривизна линий на поверхности 201
§ 38. Теорема Менье 206
§ 39. Главные сечения и главные кривизны 210
§ 40. Основные свойства главных направлений 216
§ 41. Формула Эйлера 222
§ 42. Исследование главных кривизн и три типа точек на поверхности 225
§ 43. Вычислительные формулы 231
§ 44. Линии кривизны 234
§ 45. Асимптотические линии 239
§ 46. Третья основная квадратичная форма и сферическое отображение поверхности 246

Глава VI. **Развертывающиеся поверхности**

§ 47. Линейчатые и развертывающиеся поверхности 253
§ 48. Строение развертывающейся поверхности 256
§ 49. Огибающая семейства поверхностей от одного параметра 261
§ 50. Развертывающаяся поверхность как огибающая семейства плоскостей 265
§ 51. Развертывающаяся поверхность как поверхность нулевой гауссовой кривизны 271
§ 52. Ортогональные траектории развертывающихся поверхностей 275
§ 53. Геометрические свойства линий кривизны 280
§ 54. Сопряженные сети на поверхности 284

Глава VII. **Внутренняя геометрия поверхности**

§ 55. Роль первой квадратичной формы 290
§ 56. Деривационные формулы Гаусса и Вейнгартена 292
§ 57. Роль второй квадратичной формы 298
§ 58. Формулы Гаусса и Кодацци 302
§ 59. Векторы на поверхности 307
§ 60. Параллельное перенесение векторов на поверхности 311
§ 61. Свойства параллельного перенесения 314
§ 62. Внутренняя (или геодезическая) кривизна кривых на поверхности 318
§ 63. Геодезические линии на поверхности 323
§ 64. Полугеодезическая система координат на поверхности 326
§ 65. Экстремальное свойство геодезических 330
§ 66. Об изгибании поверхностей непостоянной кривизны 333
§ 67. Продолжение. Случай поверхностей, изгибаемых в поверхности вращения 338
§ 68. Об изгибании поверхностей постоянной гауссовой кривизны 345
§ 69. Некоторые виды поверхностей постоянной кривизны 348
§ 70. Теорема Гаусса-Бонне 354

ВВЕДЕНИЕ.

Хотя в математике обычно очень трудно составить себе общее представление о даиной области до знакомства с ней по существу, дадим все же в самых общих чертах характеристику предмета диференциальной геометрии.

Как известно, *аналитическая геометрия* основана на сопоставлении: каждой точке пространства — трех чисел (координат), каждой поверхности — уравнения, связывающего текущие координаты, каждой кривой — двух таких уравнений. Благодаря этому геометрические факты могут быть переведены на язык алгебры, геометрические задачи могут быть решены приемами алгебры, после чего результат при помощи обратного перехода вновь истолковывается на геометрическом языке. Основная идея здесь, очевидно, заключается в том, чтобы заставить сильный и действенный алгорифм алгебры регулярным образом работать для геометрических целей. При этом прогресс выражается не только и не столько в том, что старые задачи решаются более совершенным аналитическим методом, сколько в возможности неизмеримо расширить самый круг геометрических проблем по сравнению с проблемами, доступными элементарному подходу.

Диференциальная геометрия означает аналогичное использование в геометрических целях аппарата *диференциального исчисления*. При этом снова центр тяжести лежит в создании новой области геометрического исследования, куда позволяет проникнуть применение нового алгорифма. Чтобы отдать себе отчет, чем характеризуется эта область — область диференциальной геометрии, — нужно вспомнить, где и как вообще находит себе применение аппарат анализа бесконечно малых. Чтобы привести элементарный пример, рассмотрим прямолинейное, но неравномерное движение точки по закону

$$s = s(t),$$

выражающему пройденный путь в зависимости от времени. Изучим это движение за бесконечно малый промежуток времени от t до $t + \Delta t$. Тогда, как известно из диференциального исчисления, пройденный за время Δt путь будет выражаться величиной

$$\Delta s = s'(t)\,\Delta t + \varepsilon\,\Delta t,$$

где $s'(t)$ — производная, а ε стремится к нулю вместе с Δt. Мы замечаем, что если пренебречь $\varepsilon\,\Delta t$, бесконечно малой высшего порядка по отношению к Δt, то зависимость Δs от Δt окажется линейной с коэ-

фициентом $s'(t)$, т. е. движение можно считать равномерным, с постоянной скоростью $s'(t)$.

Эта же идея лежит в основе всех приложений дифференциального исчисления: сложные зависимости становятся в бесконечно малом линейными, неравномерные процессы — равномерными и т. д., если пренебречь бесконечно малыми высших порядков. Мы получаем возможность изучать интересующие нас зависимости в чрезвычайно упрощенном виде, правда, лишь в бесконечно малом. Но, во-первых, это и само по себе бывает важно (в указанном примере мы пришли к вычислению мгновенной скорости путем дифференцирования пути по времени), во-вторых, интегральное исчисление дает нам возможность вернуться, где это нужно, к оценке процесса в целом [1]).

Дифференциальная геометрия является осуществлением этой же идеи в области геометрии. Другими словами, геометрические объекты — линии и поверхности — будут изучаться нами с точки зрения их строения в бесконечно малых кусках. И это „микроскопическое исследование" обнаружит нам ряд стройных закономерностей, не видимых простым глазом и обнаруживающихся лишь в бесконечно малом. Возникает новый мощный метод исследования геометрических объектов, более отчетливое представление о котором мы получим при изучении его по существу.

Сделаем еще одно предварительное замечание. Так как сущность метода связана с применением дифференциального исчисления, то мы не должны быть связаны какими-либо ограничениями в смысле дифференцируемости рассматриваемых функций. Если не оговорено противное, *мы будем раз навсегда предполагать, что все рассматриваемые функции однозначны и дифференцируемы, причем имеют непрерывные производные до любого порядка, который нам может понадобиться.* Отметим также, что на протяжении всей книги рассматриваются исключительно в е щ е с т в е н н ы е переменные.

---

[1]) Мы говорим здесь о приложениях уже созданного дифференциального исчисления. На самом деле, не только эти приложения, но и само создание анализа бесконечно малых стало возможным только потому, что материальные процессы имеют тенденцию в малых размерах приобретать равномерный характер (пока, разумеется, не начинает сказываться атомное строение вещества). Эту тенденцию в абстрактной форме и отражает дифференциальное исчисление.

ГЛАВА I.

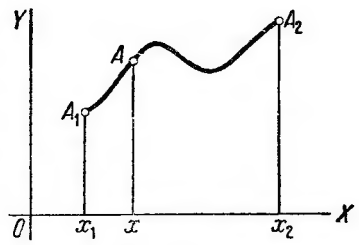
ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О КРИВЫХ НА ПЛОСКОСТИ.

Эта глава занимает в курсе довольно своеобразное место. В ней разбирается ряд вопросов, пограничных между анализом и геометрией и, следовательно, доступных формулировке без предварительных специально геометрических построений. Несмотря на важность этих вопросов и с точки зрения анализа, и с точки зрения геометрии, следует иметь в виду, что они, собственно, нетипичны для основного содержания дифференциальной геометрии и не находят себе там прямого приложения. Нетипичен и метод доказательств, основанный на сравнительно тонком применении теорем анализа. В дальнейших отделах используются методы более геометричные и наглядные. В главе I существенны для дальнейшего лишь §§ 1—5.

§ 1. Обыкновенные и особые точки плоской кривой.

Так как нашей задачей является изучение кривых в бесконечно малом, то мы будем интересоваться не столько кривой в целом, сколько ее малыми кусками. Дадим основные определения. Назовем *простым отрезком* [1]) кривой геометрическое место точек, координаты которых хотя бы в одной какой-нибудь прямоугольной декартовой системе удовлетворяют уравнению

$$y = f(x) \quad \text{при} \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \qquad (1)$$



Черт. 1.

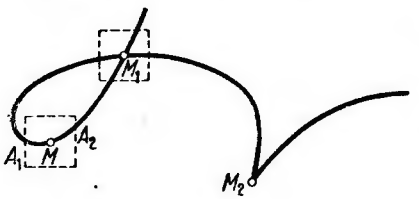
где x_1, x_2 — два фиксированных значения. Конечно, $f(x)$ предполагается однозначной, непрерывной и достаточное число раз дифференцируемой, как и все функции, которые мы будем рассматривать.

Легко уяснить наглядный смысл этого определения. Простой отрезок A_1A_2 (черт. 1) находится, очевидно, во взаимно однозначном соответствии с прямолинейным отрезком (x_1, x_2) на оси X, причем каждая точка A отрезка A_1A_2 получена из соответствующей точки x на оси X смещением этой точки параллельно оси Y. Таким образом простой

[1]) Термин этот не является общепринятым и вводится нами в целях уточнения терминологии.

отрезок A_1A_2 получен из прямолинейного отрезка (x_1, x_2) путем довольно простой деформации последнего; можно считать, что (1) выражает как раз закон этой деформации. При этом непрерывность и дифференцируемость $f(x)$ гарантируют нам, с наглядной точки зрения, „плавный ход" отрезка A_1A_2. Так, на нем не может быть изломов, точек заострения типа M_2 на черт. 2, и т. д.

Добавим еще следующее. По определению простого отрезка его уравнение в одной какой-нибудь прямоугольной декартовой системе координат можно представить в виде (1); но это не значит, что то же самое возможно в любой прямоугольной декартовой системе координат. Так, если на черт. 1 поменять местами оси X, Y, то $f(x)$ перестанет быть однозначной.



Черт. 2.

Теперь нам нужно выяснить, в каком отношении находится понятие простого отрезка к более сложным понятиям. Рассмотрим геометрическое место точек, удовлетворяющих — своими координатами x, y — уравнению

$$F(x, y) = 0, \qquad (2)$$

где $F(x, y)$ определена на всей плоскости или в некоторой области на ней.

Это геометрическое место мы будем называть *кривой*. Такое название оправдывается тем, что, как мы сейчас увидим, малые куски геометрического места (2) имеют, как правило, форму простых отрезков.

Назовем M *обыкновенной точкой* кривой (2), если вблизи нее кривая имеет вид простого отрезка; точнее, если M можно заключить в прямоугольник (хотя бы очень малый) так, что попавшая внутрь него часть кривой (2) является *простым отрезком*. Точки, в которых нельзя этого добиться, как бы мы ни уменьшали размеры прямоугольника, называются *особыми*. (Таковы на черт. 2 точки M_1 и M_2.)

Теорема. *Если в данной точке $M_0(x_0, y_0)$ на кривой (2) значения частных производных от $F(x, y)$ по x и y*

$$F_x(x_0, y_0), \quad F_y(x_0, y_0)$$

не обращаются в нуль одновременно, то точка $M_0(x_0, y_0)$ обыкновенная.

Доказательство вытекает немедленно из теоремы существования неявной функции. Пусть, для определенности,

$$F_y(x_0, y_0) \neq 0\ ^1).$$

Кроме того, так как (x_0, y_0) лежит на кривой (2),

$$F(x_0, y_0) = 0.$$

---

[1]) Если бы было $F_y(x_0, y_0) = 0$, то, в силу нашего предположения, обязательно выполнялось бы неравенство $F_x(x_0, y_0) \neq 0$, и мы поменяли бы ролями оси координат.

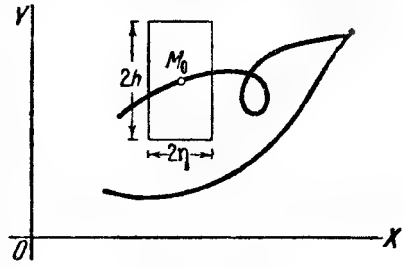
Тогда теорема существования утверждает следующее: можно указать заключающий точку M_0 прямоугольник со столь малыми сторонами 2η и $2h$ (черт. 3), что в нем (т. е. при значениях x, y, ограниченных неравенствами $x_0-\eta\leqslant x\leqslant x_0+\eta$, $y_0-h\leqslant y\leqslant y_0+h$) уравнение

$$F(x,\ y)=0$$

однозначно разрешается относительно y, т. е. может быть заменено эквивалентным ему уравнением вида

$$y=f(x)\ ^1).$$

Здесь, как всегда у нас, $f(x)$ — однозначная и диференцируемая функция. Следовательно, указанный прямоугольник вырезает из нашей кривой простой отрезок, и точка M_0 — *обыкновенная* по определению.



Черт. 3.

Из доказанной теоремы следует, что *особыми могут быть только те точки кривой* (2), *в которых*

$$F_x(x,\ y)=F_y(x,\ y)=0, \qquad (3)$$

т. е. обе частные производные обращаются в нуль одновременно. Любопытно, что, таким образом, координаты x, y особых точек, если таковые существуют на кривой, должны удовлетворять сразу трем уравнениям: уравнению (2) и двум уравнениям (3).

Заметим, что формулированный в нашей теореме достаточный признак обыкновенной точки не является необходимым. Возьмем, например, параболу

$$y^2-x=0,$$

которая, очевидно, вся состоит из обыкновенных точек ($F_x=-1\neq 0$).

Рассмотрим уравнение, полученное из данного умножением его левой части на x^2+y^2:

$$(x^2+y^2)(y^2-x)=0.$$

Новое уравнение определяет ту же самую параболу, так как множитель x^2+y^2 обращается в нуль только в точке $x=y=0$, а эта точка и раньше принадлежала параболе [2]).

Между тем теперь, как легко проверить, частные производные по x и y от левой части уравнения в точке $x=y=0$ обе обращаются в нуль, хотя начало координат попрежнему является обыкновенной точкой на нашей параболе.

---

[1]) См., например, Гурса, Курс анализа, т. I, § 32. Напомним еще раз, что в нашем изложении подразумеваются существование и непрерывность производных рассматриваемых функций.

[2]) Как было оговорено во введении, мы рассматриваем исключительно вещественные переменные, так что мнимые ветви для нас не существуют.

Итак, не меняя кривой, а изменив лишь аналитическую природу уравнения, можно добиться обращения в нуль F_x и F_y одновременно точке, остающейся попрежнему обыкновенной.

В соответствии со сказанным, признак (3) для особой точки является необходимым, но не достаточным.

§ 2. Строение кривой вблизи обыкновенной точки.

Как мы знаем, вблизи любой обыкновенной точки $M_0(x_0, y_0)$ кривая представляет собой простой отрезок, т. е. может быть представлена уравнением

$$y = f(x) \quad \text{при} \quad x_0 - \eta \leqslant x \leqslant x_0 + \eta.$$

Изучим поведение кривой вблизи фиксированной обыкновенной точки $M_0(x_0, y_0)$. Возьмем точку $M(x, y)$ на выделенном около M_0 простом отрезке кривой. Обозначая для краткости

$$x - x_0 = \Delta x, \quad \text{т. е.} \quad x = x_0 + \Delta x,$$

можно написать, пользуясь разложением в ряд Тэйлора с остаточным членом:

$$y = f(x) = y_0 + y_0' \Delta x + y_0'' \frac{(\Delta x)^2}{2!} + y_0''' \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \ldots + y_0^{(n)} \frac{(\Delta x)^n}{n!} + R_n. \quad (4)$$

Здесь y_0, y_0', y_0'', ... и т. д. представляют собой значения $f(x)$ и ее последовательных производных в точке $x = x_0$. Остаточный член R_n имеет вид

$$R_n = f^{(n+1)}(\xi) \frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!},$$

где ξ подходящим образом взято между x_0 и x.

Ценность выражения (4) заключается в том, что ордината y некоторой соседней точки M на кривой оказывается равной ординате y_0 в точке M_0 плюс добавочные члены, расположенные по возрастающим степеням Δx.

По общей установке дифференциальной геометрии, мы будем изучать кривую в бесконечно малой области около точки M_0, т. е. при M, стремящейся по кривой в M_0, и, следовательно, при Δx, стремящемся к нулю. Но тогда члены, идущие после y_0 в выражении (4), будут бесконечно малыми соответственно 1-го, 2-го, 3-го и т. д. порядков малости относительно Δx. Если нас интересуют в данном вопросе лишь бесконечно малые до n-го порядка включительно, а порядками более высокими мы пренебрегаем, то мы будем говорить, что рассмотрение ведется с *точностью n-го порядка*. В этом случае мы имеем право откинуть остаточный член R_n, который будет бесконечно малым $n+1$-го порядка (не ниже, как видно из его выражения), и уравнение (4) принимает вид

$$y \approx y_0 + y_0' \Delta x + \ldots + y_0^{(n)} \frac{(\Delta x)^n}{n!}, \quad (5)$$

т. е. y выражается через Δx (а следовательно, и через x) полиномом n-й степени. Итак, в бесконечно малом уравнение кривой приобретает упрощенную форму (5); но нельзя, конечно, упускать из виду, что уравнение (5) имеет место лишь с точностью n-го порядка, т. е. с ошибкой, бесконечно малой (не ниже) $n+1$-го порядка. В связи с этим мы употребляем знак приближенного равенства. Точность n, с которой мы ведем рассмотрение, может быть различной.

Начнем с наиболее грубой оценки поведения кривой. Положим $n=1$, т. е. будем учитывать лишь бесконечно малые одного порядка с Δx, пренебрегая порядками высшими.

Тогда (4) перепишется в виде

$$y = y_0 + y_0'\Delta x + R_1,$$

или, что то же,

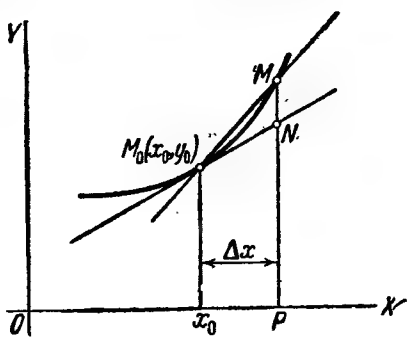
$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + R_1, \tag{6}$$

где

$$R_1 = \frac{1}{2} y''(\xi)(\Delta x)^2.$$

Мы замечаем, что (6) представляет собой, если пренебречь бесконечно малым 2-го порядка R_1, уравнение прямой линии, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, с угловым коэфициентом y_0'. Таким образом, *с точностью 1-го порядка, кривая вблизи обыкновенной точки M_0 (по обе ее стороны) неотличима от прямой линии*

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0). \tag{7}$$



Черт. 4.

Точнее это означает, что расхождение NM по ординате между прямой линией (7) и кривой (6) будет бесконечно малым высшего порядка по сравнению с Δx (черт. 4). Действительно, так как ордината для точки M на кривой выражается правой частью (6), а для соответствующей точки N на прямой — правой частью (7), то разность между ними NM равна как раз остаточному члену R_1, бесконечно малому не ниже 2-го порядка. Как известно из основ диференциального исчисления, касательной к кривой в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M при M, стремящейся в M_0 по кривой; касательная имеет угловой коэфициент y_0' и, конечно, проходит через M_0.

Следовательно, касательная в точке M_0 совпадает с прямой (7), и, значит, с точностью 1-го порядка неотличима от кривой вблизи M_0. В этом и заключается основной геометрический смысл касательной.

Изучим теперь уклонение кривой (6) от ее касательной (7). Мы уже установили, что разность ординат для точек кривой (6) и касательной (7) при данном x имеет вид

$$NM = R_1 = \frac{1}{2} y''(\xi)(\Delta x)^2, \tag{8}$$

где ξ заключено между x_0 и $x_0 + \Delta x$.

Допустим сначала, что y'' в точке x_0 положительна:

$$y_0'' > 0.$$

Так как $y''(x)$ — непрерывная функция, то и около x_0, в достаточно малой окрестности $(x_0 - \eta,\ x_0 + \eta)$, она сохранит положительный знак. Беря Δx настолько малым, чтобы $x_0 + \Delta x$, а следовательно, и ξ попали в эту окрестность, мы будем иметь в выражении (8) заведомо положительный коэфициент $y''(\xi)$; следовательно, и все выражение будет больше нуля *при любом знаке* у Δx, т. е. при смещении по кривой как вправо, так и влево.

Следовательно, вблизи x_0 уклонение NM кривой от касательной будет в случае $y_0'' > 0$ положительным, и кривая расположится *над* своей касательной.

В этом случае мы говорим, что в точке M_0 *кривая обращена выпуклостью вниз.*

Допустим теперь, что $y_0'' < 0$. Тогда в *достаточно малой окрестности* точки x_0 $y''(x)$ сохраняет отрицательный знак; в формуле (8) $y''(\xi) < 0$, а так как $(\Delta x)^2 > 0$ всегда, то

$$NM < 0.$$

Кривая вблизи M_0 расположится *под* своей касательной; мы будем говорить, что в точке M_0 *выпуклость кривой обращена кверху.*

В обоих случаях, как видно из (8), уклонение кривой от касательной будет бесконечно малым 2-го порядка.

Остается изучить случай $y_0'' = 0$. Допустим, что при этом $y_0''' \neq 0$. Используем формулу (4) при $n = 2$. Получим

$$y = y_0 + y_0' \Delta x + y'''(\xi)\frac{(\Delta x)^3}{6}. \tag{9}$$

(Член 2-й степени относительно Δx исчез, так как $y_0'' = 0$.)

Сравнивая (9) с уравнением касательной (7), мы видим, что разность ординат кривой (9) и касательной (7) выражается при каждом значении x так:

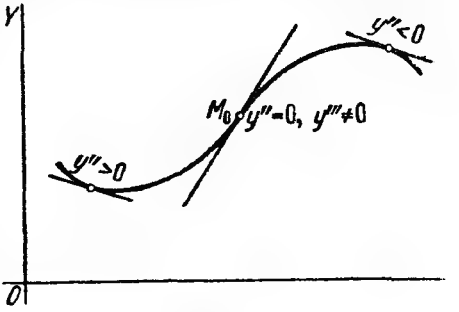
$$NM = \frac{1}{6} y'''(\xi)(\Delta x)^3. \tag{10}$$

Итак, вблизи M_0, где $y_0'' = 0$, кривая неотличима от своей касательной с точностью уже, по крайней мере, 2-го порядка (уклонение NM не ниже 3-го порядка). В этом случае мы назовем M_0 *точкой распрям-*

ления. Изучим теперь уклонение кривой от касательной при сделанном выше предположении $y_0''' \neq 0$ (наиболее типичный случай).

Ограничиваемся снова столь малой окрестностью точки x_0, $(x_0-\eta, x_0+\eta)$, что в ней непрерывная функция $y'''(x)$ сохраняет тот же знак, который она имела в x_0, т. е. знак y_0'''.

Тогда, беря $x=x_0+\Delta x$ в пределах этой окрестности, в силу чего ξ тоже попадает в нее, мы получаем неизменный знак у первого множителя в (10). Что же касается второго множителя, то он меняет знак вместе с Δx, т. е. в зависимости от того, сместимся ли мы от x_0 вправо или влево.



Черт. 5.

В результате NM будет иметь знак плюс при смещении в одну сторону от точки x_0 и знак минус при смещении в другую сторону. Другими словами, в одну сторону от точки M_0 кривая расположена *над*, а в другую сторону — *под* своей касательной (черт. 5).

В этом случае точка M_0 называется *точкой перегиба*. Такие точки являются пограничными между точками с выпуклостью кверху и точками с выпуклостью книзу. Вблизи точки перегиба, как видно из (10), кривая уклоняется от касательной лишь на бесконечно малое 3-го порядка.

Итак, случай $y_0'' \neq 0$ изучен полностью, случай же $y_0''=0$ (точка распрямления) — лишь в предположении $y_0''' \neq 0$ (точка перегиба).

Перейдем теперь к самому общему случаю [1]). Выпишем последовательность производных в точке x_0:

$$y_0'', y_0''', \ldots, y_0^{(n)}, y_0^{(n+1)}, \ldots$$

Пусть $y_0^{(n+1)}$ будет первое по порядку число среди чисел этой последовательности, отличное от нуля. Таким образом,

$$y_0^{(n+1)} \neq 0; \quad y_0''=y_0'''=\ldots=y_0^{(n)}=0. \tag{11}$$

При $n=1$ и $n=2$ мы получаем только что разобранные случаи. Выпишем формулу (4), используя условия (11); она примет вид

$$y=y_0+y_0'\Delta x+y^{(n+1)}(\xi)\frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{12}$$

---

[1]) Если оставить в стороне возможность обращения в нуль всех существующих в точке M_0 производных от $y(x)$.

Вычитая из ординаты точки кривой (12) ординату точки касательной (7) при том же значении x, мы получим уклонение NM:

$$NM = y^{(n+1)}(\xi)\frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{13}$$

Снова $y^{(n+1)}(x)$ сохраняет в достаточно малой окрестности точки x_0 постоянный знак, именно, знак $y_0^{(n+1)}$, и вопрос сводится к поведению $(\Delta x)^{n+1}$. Здесь нужно различать два случая:

1) n нечетное; тогда при любом знаке Δx $(\Delta x)^{n+1}$ положительно, и NM сохраняет постоянный знак, совпадающий со знаком $y^{(n+1)}(\xi)$, т. е. со знаком $y_0^{(n+1)}$. Отсюда, если $y_0^{(n+1)} > 0$, то кривая лежит над касательной, если $y_0^{(n+1)} < 0$, то — под касательной, в обоих случаях — по обе стороны точки касания M_0. Имеем, соответственно, выпуклость книзу или кверху. От разобранного выше случая $y_0'' \neq 0$ отличие здесь будет в том, что кривая уклоняется от касательной на бесконечно малое NM более высокого порядка, если $n = 3, 5, 7, \ldots$ При $n = 1$ возвращаемся к случаю $y_0'' \neq 0$.

2) n четное. Тогда $(\Delta x)^{n+1}$ имеет тот же знак, что и Δx, т. е. меняет знак в зависимости от того, вправо или влево смещаемся мы по кривой из точки касания M_0. Вместе с $(\Delta x)^{n+1}$ будет менять знак и NM, как видно из (13). Следовательно, кривая по одну сторону M_0 расположена над, а по другую — под касательной. Имеем точку перегиба общего вида, причем при $n = 2$ приходим к выше рассмотренному случаю $y_0'' = 0$, $y_0''' \neq 0$. При $n = 4, 6, \ldots$ получаются точки перегиба со все более тесным примыканием кривой к касательным, взятым в этих точках: NM будет бесконечно малым 5-го, 7-го, ... порядка.

Практически кривая (в ее простом отрезке) состоит, вообще говоря, из точек, удовлетворяющих условию $y'' \neq 0$. Лишь отдельные точки оказываются точками перегиба, или точками выпуклости с более тесным примыканием кривой к касательной, чем обычно.

§ 3. Касательная и нормаль в обыкновенной точке. Декартовы координаты

Пусть кривая задана уравнением

$$F(x, y) = 0. \tag{14}$$

Рассмотрим какую-нибудь точку $M_0(x_0, y_0)$ на этой кривой, в которой F_x и F_y не обращаются одновременно в нуль. Пусть, для определенности,

$$F_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Тогда вблизи точки M_0, которая будет обыкновенной, кривую можно представить в виде простого отрезка

$$y = f(x). \tag{15}$$

Уравнение касательной в точке M_0 будет, согласно (7), иметь вид

$$y = y_0 + y'_0(x - x_0), \tag{16}$$

где x, y — текущие координаты касательной.

Так как y'_0 есть значение производной от функции, неявно определяемой уравнением (14), то

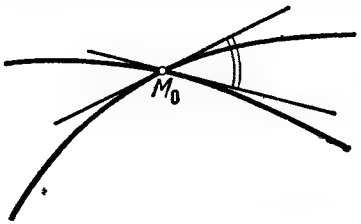
$$y'_0 = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}.$$

Вставляя это выражение в (16) и освобождаясь от знаменателя, получим уравнение касательной в M_0 в виде

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \tag{17}$$

Ввиду симметрии этого уравнения относительно координатных осей x, y, оно сохранит свой вид и в том случае, если обыкновенный характер точки M_0 обеспечивается условием

$$F_x(x_0, y_0) \neq 0.$$



Черт. 6.

Как мы знаем, кривая вблизи любой обыкновенной точки M_0 с точностью 1-го порядка неотличима от подходяще выбранной прямой линии, именно, от своей касательной в точке M_0. В связи с этим мы естественным образом можем ввести понятие об угле, образуемом двумя кривыми в их общей точке M_0, предполагая, что M_0 является обыкновенной точкой для обеих кривых (черт. 6). А именно, *углом между кривыми в точке M_0 мы назовем угол между их касательными в этой точке* (черт. 6).

Если уравнения кривых известны, то легко найти угловые коэфициенты их касательных в M_0, а отсюда и тангенс угла между ними.

Во многих вопросах важную роль играет понятие *нормали. Нормалью к кривой в данной ее точке M_0 называется прямая, проходящая через M_0 и образующая с кривой прямой угол* (т. е. *перпендикулярная к касательной в точке M_0*).

Нормаль представляет собой, таким образом, нечто вроде перпендикуляра к кривой, чем и определяется ее значение.

Уравнение нормали легко получить из уравнения касательной (17), переставив коэфициенты при $x - x_0$ и $y - y_0$ и изменив у одного из них знак на обратный:

$$F_x(x_0, y_0)(y - y_0) - F_y(x_0, y_0)(x - x_0) = 0. \tag{18}$$

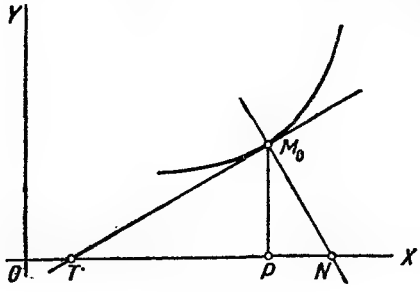
Действительно, как легко проверить по правилам аналитической геометрии, прямая (18) проходит через $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно к касательной (17), т. е. является нормалью.

№ 66680

В некоторых случаях для изучаемой кривой можно указать определенную прямую линию, которая связана с ней какими-либо интересными геометрическими зависимостями (например, для параболы — ее директрису, с которой парабола связана равенством расстояния от точек параболы до директрисы и фокуса; или ее ось, относительно которой парабола расположена симметрично, и т. д.).

Часто бывает целесообразно принять указанную прямую за ось X, что облегчает изучение кривой и прямой в их взаимной связи. В частности, может оказаться интересным узнать положение точек пересечения T и N касательной и нормали к кривой с указанной прямой, принятой за ось X (черт. 7). Пусть P — проекция точки M_0 кривой на ось X. Рассмотрим отрезки PT и PN, приписывая им направление на оси X от P соответственно к T и N и беря их численное выражение со знаком $\pm$ в зависимости от их направленности в положительную или отрицательную сторону оси X. Отрезки PT и PN называются соответственно *подкасательной* и *поднормалью*.

Найдем абсциссы x_T и x_N точек T и N. Положим в уравнении касательной (17) $y=0$; тогда x превратится в абсциссу точки пересечения касательной с осью X, т. е. в x_T.



Черт. 7.

Получим

$$F_x \cdot (x_T - x_0) + F_y \cdot (-y_0) = 0,$$

откуда

$$x_T - x_0 = \frac{F_y}{F_x} y_0. \qquad (19)$$

Поступая аналогично с уравнением нормали (18), получим

$$x_N - x_0 = -\frac{F_x}{F_y} y_0. \qquad (20)$$

В левой части (19) стоит разность абсцисс точек T и P, т. е. численное выражение отрезка PT; аналогично, в левой части (20) — численное выражение PN. Напишем

$$\left.\begin{aligned} PT &= -\left(\frac{dx}{dy}\right)_0 y_0, \\ PN &= \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 y_0. \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Здесь в правых частях уравнений мы заменили, для краткости, $\frac{F_y(x_0, y_0)}{F_x(x_0, y_0)}$ через $-\left(\frac{dx}{dy}\right)_0$ и, в соответствии с этим, $-\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$ через $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, по правилам диференцирования неявной функции.

Под $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ мы понимаем взятое в точке M_0 отношение диференциалов переменных, связанных уравнением (14). Конечно, формулы (21)

легко было бы вывести из наглядных соображений, пользуясь тригонометрией: PT есть один катет, $y_0 = PM_0$ — другой катет в треугольнике TPM_0, а $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ — тангенс угла наклона касательной. Следовательно,

$$PT\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = y_0,$$

откуда следует сейчас же первая из формул (21). Мы предпочли аналитический вывод формул (21) ввиду его полной общности, в то время как при наглядном выводе пришлось бы трудиться над исследованием различных возможных случаев расположения треугольников TPM_0 и NPM_0, учитывать знаки отрезков, и т. д.

Длины отрезков M_0T и M_0N (взятые по абсолютной величине) иногда называют, соответственно, *длиной касательной* и *длиной нормали*.

Пользуясь формулой расстояния между двумя точками, получим

$$M_0T = \sqrt{(x_T - x_0)^2 + y_0^2},$$
$$M_0N = \sqrt{(x_N - x_0)^2 + y_0^2}.$$

Заменяя здесь $x_T - x_0$ и $x_N - x_0$ через PT и PN, выраженные по формулам (21), и вынося $|y_0|$ из под корней, приходим к формулам

$$M_0T = |y_0|\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)_0^2},$$
$$M_0N = |y_0|\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0^2}. \qquad (22)$$

Рассмотрим теперь несколько примеров, где требуется найти кривую, определенным образом связанную геометрически с прямой, принятой за ось X.

1. Кривая с постоянной поднормалью $PN = a$.

Мы ставим требование, чтобы для *всех* точек кривой поднормаль PN сохраняла постоянную величину a (черт. 8). Пользуясь второй из формул (21), запишем

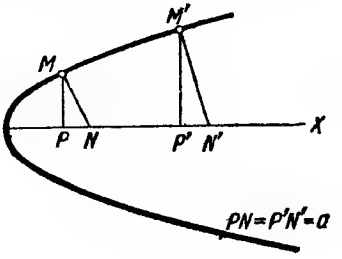
$$a = \frac{dy}{dx}\,y \quad \text{или} \quad a\,dx = y\,dy.$$

Интегрируя это уравнение почленно, получаем

$$ax = \frac{1}{2}\,y^2 + C,$$

или

$$y^2 = 2ax - 2C.$$



Черт. 8.

Мы получили параболу с осью, совпадающей с осью X, и с параметром $p = |a|$. Кривая обращена вогнутостью влево в случае $a < 0$ и вправо — в случае $a > 0$.

2. Кривая с постоянной подкасательной $PT=a$.

Запишем требование постоянства подкасательной во всех точках кривой, пользуясь первой из формул (21):

$$-\frac{dx}{dy}y=a \quad \text{или} \quad -\frac{dx}{a}=\frac{dy}{y}.$$

Интегрируя почленно, получаем

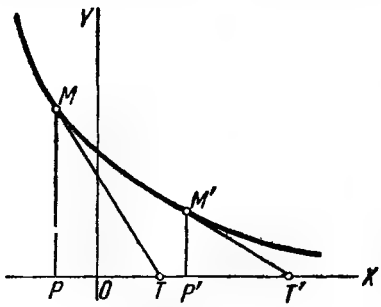
$$-\frac{x}{a}+C=\ln y,$$

откуда

$$y=y_0e^{-\frac{x}{a}},$$

где через y_0 обозначено e^C. Мы получили график показательной функции (черт. 9).

3. Кривая с постоянной длиной нормали $M_0N=a$ (для любой точки M_0 на кривой).



Черт. 9.

Пользуясь второй из формул (22), запишем наше требование в виде

$$|y|\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=a,$$

или

$$y^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=a^2,$$

или, наконец,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{a^2}{y^2}-1,$$

откуда

$$dx=\pm\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}}.$$

Интегрируя почленно, получим

$$x=\mp\sqrt{a^2-y^2}+C,$$

откуда

$$(x-C)^2+y^2=a^2.$$

Мы получили окружность радиуса a с центром на оси X.

4. Кривая с постоянной длиной касательной $M_0T=a$.

Записывая это требование для любой точки кривой, получим, пользуясь первой из формул (22),

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=a. \tag{23}$$

Мы будем рассматривать кривую лишь в верхней полуплоскости и поэтому имеем право считать $|y|=y>0$.

Введем в рассмотрение угол φ, $0<\varphi<\pi$, определяемый из условия

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{dy}{dx}. \tag{24}$$

Очевидно, φ есть угол, образуемый касательной к кривой с осью X. Заменяя в (23) $\frac{dx}{dy}$ через $\operatorname{ctg}\varphi$, получим $\frac{y}{\sin\varphi} = a$ или

$$y = a\sin\varphi. \tag{25}$$

Отсюда

$$dy = a\cos\varphi\, d\varphi.$$

Но из (24)

$$dx = dy\operatorname{ctg}\varphi.$$

Вставив сюда полученное для dy выражение, получим

$$dx = a\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}d\varphi,$$

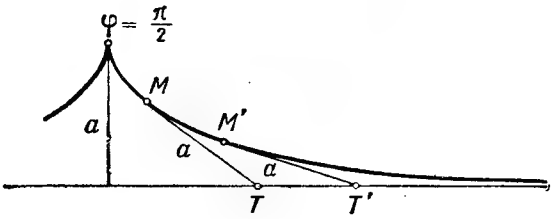
или

$$dx = a\left(\frac{1}{\sin\varphi} - \sin\varphi\right)d\varphi.$$

Интегрируя почленно, найдем

$$x = a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right) + C. \tag{26}$$

Мы получили искомую кривую в параметрической записи (см. следующий параграф), а именно, уравнения (25) и (26) выражают x и y как функции угла φ. Исследуя ее форму, легко убедиться, что она расположена симметрично относительно своей ординаты, соответствующей значению $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (т. е. при $x = C$), где имеет особую точку с касательной, для обеих ветвей направленной параллельно оси Y (черт. 10).



Черт. 10.

Кривая эта называется *трактрисой*; в теории поверхностей играет важную роль поверхность, образованная ее вращением около оси X, так называемая *псевдосфера*.

Во всех четырех примерах произвольное постоянное C в ответах означает лишь возможность сдвигать полученную кривую параллельно оси X как твердое тело; при этом кривая продолжает, очевидно, удовлетворять условиям задачи.

§ 4. Касательная и нормаль в обыкновенной точке. Параметрическое представление.

Рассмотрим геометрическое место точек $M(x, y)$, координаты которых определяются из уравнений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{27}$$

где t — независимое переменное, пробегающее всевозможные значения в определенной области изменения

$$a \leqslant t \leqslant b.$$

Такое геометрическое место мы будем называть *кривой в параметрическом представлении.*

Как мы сейчас увидим, в малых кусках мы будем, вообще говоря, получать простые отрезки, как и в случае задания кривой уравнением (2). Если же брать кривую в целом (что нас, вообще говоря, интересовать не будет), то эти два способа задания не всегда равносильны.

Рассмотрим на кривой точку $t = t_0$, $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, в которой производные

$$\varphi'(t_0), \quad \psi'(t_0)$$

не обращаются в нуль одновременно. Положим, для определенности, что отлична от нуля именно $\varphi'(t_0)$:

$$\varphi'(t_0) \neq 0. \tag{28}$$

Перепишем первое из уравнений (27) в виде

$$-x + \varphi(t) = 0. \tag{29}$$

Мы можем рассматривать (29) как частный случай уравнения вида

$$F(x, t) = 0.$$

При этом в точке $x = x_0$, $t = t_0$ уравнение (29) удовлетворяется, а частная производная по t от его левой части, равная, очевидно, $\varphi'(t_0)$, отлична от нуля согласно (28). Тогда при значениях x и t, достаточно близких к x_0 и t_0, уравнение (29) однозначно разрешается относительно t (согласно общей теореме существования неявной функции — см. сноску [1]) на стр. 11) и может быть переписано в виде

$$t = t(x).$$

Теперь t, выраженное как функция x, мы можем подставить во второе из уравнений (27), и тогда y выразится через x однозначной функцией

$$y = f(x),$$

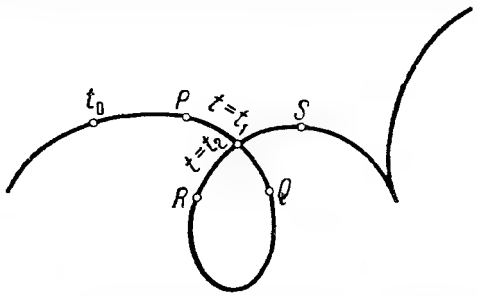
где $f(x) = \psi(t(x))$. Полученное уравнение имеет место при значениях x и t, взятых в достаточно малой окрестности x_0, t_0; в этой окрестности наша кривая представляет собой *простой отрезок.*

Итак, *при значениях t вблизи выбранного значения t_0 кривая* (27) *представляет собой простой отрезок, за исключением, может быть, тех отдельных точек, где t_0 удовлетворяет сразу двум уравнениям:*

$$\varphi'(t_0) = \psi'(t_0) = 0. \tag{30}$$

Следует подчеркнуть, что здесь близость к точке $t = t_0$ берется в смысле значений параметра t. Возможны случаи, когда при измене-

нии t кривая, пройдя через какую-нибудь точку при $t=t_1$, снова проходит через нее уже при значении $t=t_2$ (черт. 11). Геометрически мы имеем здесь одну точку и, очевидно, особую (самопересечение). Но при параметрическом представлении нам придется исследовать эту точку дважды: при значении $t=t_1$ и при $t=t_2$. Условия (30) могут не выполняться ни при t_1, ни при t_2, так что кривая вблизи значения t_1 является простым отрезком PQ, а вблизи t_2 — простым отрезком RS. Таким образом особая точка получится за счет того, что точки $t=t_1$ и $t=t_2$, удаленные друг от друга по значениям t, геометрически совпали и простые отрезки PQ и RS пересеклись.



Черт. 11.

В дальнейшем мы рассматриваем кривую (27) лишь в таких точках t_0, в которых из $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$ хотя одна не обращается в нуль и которые, следовательно, заведомо являются *обыкновенными, если ограничиться значениями t, достаточно близкими к t_0.*

Дифференцируя (27), мы получим

$$dx=\varphi'(t)\,dt,\quad dy=\psi'(t)\,dt.$$

Отсюда в рассматриваемой точке t_0 [предполагая $\varphi'(t_0)\neq 0$]

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)};$$

кроме того,

$$x_0=\varphi(t_0),\quad y_0=\psi(t_0).$$

Вставляя все это в уравнение касательной (7), получим его в виде

$$y=\psi(t_0)+\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}[x-\varphi(t_0)]$$

или

$$\varphi'(t_0)[y-\psi(t_0)]=\psi'(t_0)[x-\varphi(t_0)]. \tag{31}$$

[Ввиду симметрии этого выражения относительно обеих осей, оно сохранит свой вид и в предположении $\psi'(t_0)\neq 0$.] Такой вид имеет уравнение касательной в точке $t=t_0$. Уравнение нормали отсюда легко получить как уравнение перпендикуляра к прямой (31), проведенного через ту же точку (x_0, y_0). Для этого достаточно поменять местами коэфициенты при скобках, изменив знак у одного из них. Получим

$$\varphi'(t_0)[x-\varphi(t_0)]+\psi'(t_0)[y-\psi(t_0)]=0. \tag{32}$$

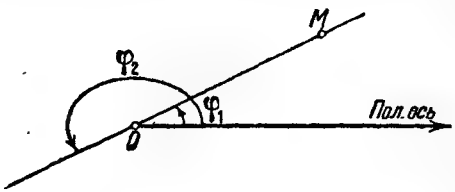
Действительно, уравнения (32) и (31) удовлетворяют известному условию перпендикулярности прямых; очевидно также, что (32) проходит через точку $x_0=\varphi(t_0)$, $y_0=\psi(t_0)$.

Если использовать уравнение (31) при $t_0 = t_1$ или $t_0 = t_2$ (черт. 11), получатся уравнения касательных соответственно к отрезкам PQ или RS в точке их пересечения.

§ 5. Касательная и нормаль в обыкновенной точке. Полярные координаты.

В некоторых случаях, например, когда с кривой связана геометрическими зависимостями определенная точка (например центр для окружности), является целесообразным изучать кривую в полярных координатах, приняв эту точку за полюс.

Уточним понятие о полярных координатах на плоскости. Пусть фиксирована некоторая точка O, которую мы будем называть *полюсом*, и выходящая из O *полупрямая*, которую будем называть *полярной осью*. Пусть на плоскости дана любая точка M; соединяя ее с O, получим прямую OM.



Черт. 12.

Назовем *полярным углом* точки M угол φ, на который нужно повернуть полярную ось, чтобы она попала на прямую OM. Очевидно, угол φ определится лишь с точностью до угла, кратного π, так как при добавочном повороте на 180° полярная ось попадает на ту же прямую OM, хотя и по другую сторону от точки O.

Когда полярный угол φ как-нибудь выбран, назовем *полярным радиусом* [1]) точки M расстояние $r = OM$, взятое со знаком $+$, если полярная ось после поворота прошла через точку M (на черт. 12 это будет при $\varphi = \varphi_1$), и со знаком $-$, если полярная ось заняла положение по другую сторону точки O (на чертеже — в случае $\varphi = \varphi_2$).

Таким образом данной точке M полярный угол φ отвечает неоднозначно, а r — однозначно, но после выбора φ. Зато, обратно, заданием φ и r точка M определяется вполне однозначно: мы повертываем полярную ось на угол φ и откладываем на ней от точки O расстояние r в положительную или отрицательную сторону в зависимости от знака r.

Часто ограничиваются случаем $r > 0$, в связи с чем угол φ выбирают так, чтобы повернутая полярная ось обязательно прошла через M; φ определится тогда с точностью до угла, кратного 2π. Однако это ограничение оказывается неудачным, так как иногда приходится приписывать r отрицательные значения в силу аналитического характера уравнения кривой. Итак, у нас обе координаты принимают любые значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению в полярных координатах:

$$r = r(\varphi), \tag{33}$$

[1]) Мы не будем употреблять здесь обычный термин „радиус-вектор", так как в дальнейшем он употребляется с бо́льшим основанием в совершенно другом смысле.

можно при желании рассматривать как параметрически заданную кривую в прямоугольных декартовых координатах. Действительно, если принять полюс O за начало, а полярную ось за положительное направление по оси X (см. черт. 12), то очевидно, что декартовы координаты любой точки M *однозначно* выразятся через ее полярные координаты:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

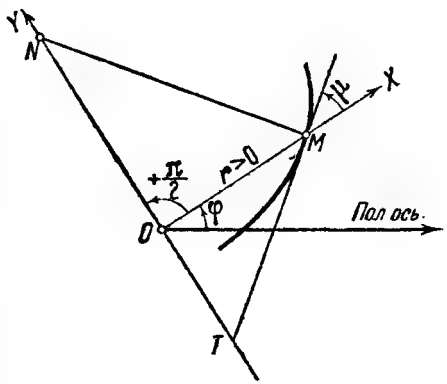
Рассматривая геометрическое место (33), мы получим здесь x, y как функции независимого параметра φ:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\varphi)\cos\varphi, \\ y &= r(\varphi)\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

т. е. кривую в параметрическом представлении. Было бы нетрудно проверить, что кривая (34) при значениях φ, близких к какому-нибудь данному значению φ_0, всегда является простым отрезком за исключением, может быть, тех значений φ_0, для которых

$$r(\varphi_0) = r'(\varphi_0) = 0\ ^{1}).$$

Оставляя в стороне этот случай, рассмотрим в полярных координатах касательную к нашей кривой в какой-нибудь точке $M(\varphi, r)$ (черт. 13).



Черт. 13.

Выберем прежде всего положительное направление на прямой OM, а именно направление, которое укажет полярная ось после ее поворота на угол φ. Это направление пойдет от O к M в случае $r > 0$ и в обратную сторону в случае $r < 0$.

Обозначим через μ угол, который образует касательная в точке M с положительным направлением прямой OM. Угол μ определится с точностью до угла, кратного π (направление на касательной можно выбирать как угодно), зато $\operatorname{tg}\mu$ будет вполне определенным. Роль угла μ заключается в том, что если в заданной точке M указать еще значение μ, то касательная в M вполне определится. Мы хотим прежде всего научиться находить μ из уравнения (33). Как окажется,

$$\operatorname{tg}\mu = r\frac{d\varphi}{dr}. \tag{35}$$

Если за полюс O принята не какая-нибудь случайная точка, а геометрически связанная с кривой, то часто бывает интересным детальнее изучить взаимное расположение полюса O, точки кривой M, касатель-

[1]) К такому виду приводятся условия (30) в нашем случае.

ной и нормали в ней. С этой целью восставим в O перпендикуляр к OM, за положительное направление на котором примем положительное направление на OM, повернутое на угол $+\frac{\pi}{2}$. Численные выражения (со знаками) отрезков OT и ON на этом перпендикуляре, где T и N — точки его пересечения с касательной MT и нормалью MN, называются соответственно *полярной подкасательной* и *полярной поднормалью*. Как окажется, их выражения имеют вид

$$OT = -r^2 \frac{d\varphi}{dr}, \quad ON = \frac{dr}{d\varphi}. \tag{36}$$

Докажем теперь формулы (35) и (36). Допустим прежде всего, что мы повернули полярную ось на некоторый угол ψ и приняли полученную полупрямую за новую полярную ось. Тогда очевидно, что все полярные углы φ, можно считать, изменятся на угол ψ, а полярные радиусы r не изменятся. Очевидно, далее, что в левых частях (35) и (36) ничего не изменится, так как все построение (черт. 13) связано лишь с полюсом O и касательной и нормалью в точке M, которую мы считаем прежней, но не связано с выбором полярной оси. Что же касается правых частей (35) и (36), то они сохранят свой вид и после того, как мы их выразим в новых координатах: как уже было указано, r (и, следовательно, dr) сохраняет прежние значения, и то же верно также для $d\varphi$, так как все φ изменились на один и тот же постоянный угол ψ.

Итак, если формулы (35), (36) верны в одной полярной системе координат, то они верны и в любой другой, полученной из нее поворотом полярной оси около полюса O.

Остается доказать, что (35), (36) верны хотя бы в одной полярной системе координат. Выберем за полярную ось полупрямую, направленную в положительную сторону прямой OM; точнее, повернем полярную ось на угол φ. Будем продолжать рассмотрение в новых координатах; очевидно, теперь полярный угол точки M равен $\varphi - \varphi = 0$, полярный же радиус r сохраняет прежнее значение. Принимая O за начало, новую полярную ось за положительную полуось X, перпендикуляр к ней с положительным направлением на нем за ось Y, и пользуясь формулами (34), получаем в точке M

$$x = r, \quad y = 0.$$

Кроме того, диференцируя (34), получим

$$dx = dr\cos\varphi - r\sin\varphi\, d\varphi,$$

$$dy = dr\sin\varphi + r\cos\varphi\, d\varphi.$$

Но в точке M $\varphi = 0$ и, если dx, dy вычислены при смещении из точки M, мы получаем из этих формул

$$dx = dr, \quad dy = r\, d\varphi.$$

Так как положительное направление OM совпадает с положительным направлением оси X, то $\operatorname{tg}\mu$ есть угловой коэфициент касательной в координатах x, y, и следовательно,

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{dy}{dx} = r\frac{d\varphi}{dr}.$$

Формула (35) доказана.

Найдем теперь точки T и N, в которых касательная и нормаль пересекают перпендикуляр к полярной оси в полюсе, т. е. ось Y. Ординаты этих точек y_T и y_N определятся из требования, чтобы угловой коэфициент отрезка TM, т. е. $\frac{0-y_T}{x-0}$, был равен угловому коэфициенту касательной $\operatorname{tg}\mu$, а угловой коэфициент отрезка NM, т. е. $\frac{0-y_N}{x-0}$, был обратным $\operatorname{tg}\mu$ по величине и по знаку. Запишем эти условия, пользуясь формулой (35) и зная, что в M $x=r$:

$$-\frac{y_T}{r} = r\frac{d\varphi}{dr} \quad \text{и} \quad -\frac{y_N}{r} = -\frac{dr}{r\,d\varphi},$$

откуда

$$y_T = -r^2\frac{d\varphi}{dr}, \quad y_N = \frac{dr}{d\varphi}.$$

Так как ординаты y_T, y_N совпадают с численными выражениями OT и ON, то формулы (36) тоже доказаны.

Приведем некоторые примеры того, как рассмотренные величины характеризуют геометрическую связь между кривой и определенной точкой, принятой за полюс.

1. Кривая, секущая под постоянным углом все лучи, выходящие из полюса: $\mu = \mu_0 = \text{const}$.

Пользуясь формулой (35), запишем это требование:

$$r\frac{d\varphi}{dr} = \operatorname{tg}\mu_0$$

или

$$\operatorname{ctg}\mu_0\, d\varphi = \frac{dr}{r}.$$

Интегрируя почленно, получаем

$$\varphi\operatorname{ctg}\mu_0 + C = \ln r,$$

откуда

$$r = r_0 e^{\varphi\operatorname{ctg}\mu_0},$$

где через r_0 обозначено e^C. Итак, в этом случае r выражается показательной функцией φ, причем $\operatorname{ctg}\mu_0$ является коэфициентом в показателе. Мы получили *логарифмическую спираль*.

2. Поднормаль $ON = a$ постоянная.

Запишем это требование, пользуясь второй из формул (36). Получим

$$\frac{dr}{d\varphi} = a$$

или

$$dr = a\,d\varphi.$$

Интегрируя почленно, получаем

$$r = a\varphi + C.$$

Полярный радиус r выражается линейной функцией φ. Мы получили *архимедову спираль*.

3. Подкасательная $OT = a$ постоянная.

Запишем это требование, пользуясь первой из формул (36). Получим

$$-r^2\frac{d\varphi}{dr} = a$$

или

$$\frac{d\varphi}{a} = -\frac{dr}{r^2}.$$

Интегрируя почленно, находим

$$\frac{\varphi}{a} + C = \frac{1}{r}.$$

Мы получили *гиперболическую спираль*.

Заметим, что во всех трех случаях произвольная постоянная интегрирования C не влияет на форму кривой; изменение C влечет лишь увеличение всех полярных углов на одну и ту же величину, т. е. поворот кривой как твердого тела около O. Интересуясь лишь формой кривой, можно считать $C = 0$.

§ 6. Строение кривой вблизи особых точек.

Мы вернемся к изучению кривой, заданной в координатах x, y уравнением

$$F(x, y) = 0. \tag{37}$$

Поведение кривой вблизи ее любой обыкновенной точки M_0 изучено нами достаточно хорошо в § 2; кривая является там простым отрезком, и в бесконечно малом по обе стороны M_0 она устроена, грубо говоря, как слегка искривленный прямолинейный отрезок.

Теперь нам нужно составить себе представление о поведении кривой (37) вблизи ее особой точки M_0, по крайней мере в наиболее распространенных случаях особых точек. Согласно (3), в особой точке первые производные левой части (37) обязательно равны нулю:

$$F_x = F_y = 0. \tag{38}$$

Так как (38) имеет место не тождественно, а лишь в рассматриваемой точке M_0, то вторые частные производные от F по x, y не имеют никаких оснований обращаться в нуль в этой точке и практически, вообще говоря, не обращаются в нуль.

Лишь в исключительных случаях в M_0 помимо (38) имеют место еще равенства

$$F_{xx} = F_{xy} = F_{yy} = 0. \tag{39}$$

Если в M_0 условия (38) имеют место, а (39) — нет. т. е. первые производные обе нули, а из вторых по крайней мере одна не равна нулю, то мы говорим, что у нас *двойная особая точка*. Это наиболее распространенный случай особой точки. Геометрический смысл названия выяснится позже.

Если имеют место и (38) и (39), но среди производных третьего порядка

$$F_{xxx},\ F_{xxy},\ F_{xyy},\ F_{yyy}$$

хотя бы одна в точке M_0 отлична от нуля, то мы называем M_0 *тройной* особой точкой. И вообще, если в M_0 все частные производные от F до $n-1$-го порядка включительно обращаются в 0, но среди производных n-го порядка есть хотя бы одна, отличная от 0, то мы называем M_0 *n-кратной особой точкой*.

Для простоты выкладок перенесем начало координат O в изучаемую точку $M_0(x_0, y_0)$. Так как старые координаты получаются из новых добавлением к ним постоянных, то в каждой данной точке значения частных производных от левой части (37) по новым координатам будут те же, что и по старым (по правилу диференцирования функции от функции). Поэтому все сказанное об F_x, F_y, F_{xx}, F_{xy}, ... в новой системе координат будет справедливо и в старой, т. е. в любой системе.

Разложим левую часть уравнения (37) в ряд Тэйлора по степеням x, y с остаточным членом R_2. Как известно, это разложение имеет вид

$$F(x, y) = F^0 + F^0_x x + F^0_y y + \frac{1}{2}(F^0_{xx} x^2 + 2F^0_{xy} xy + F^0_{yy} y^2) + R_2, \tag{40}$$

где нулем наверху отмечены значения $F(x, y)$ и ее производных, взятые в точке (0, 0), остаточный же член R_2 имеет вид

$$R_2 = \frac{1}{6}(\tilde{F}_{xxx} x^3 + 3\tilde{F}_{xxy} x^2 y + 3\tilde{F}_{xyy} xy^2 + \tilde{F}_{yyy} y^3).$$

Здесь над частными производными поставлен значок $\sim$, чтобы отметить, что они взяты в некоторой промежуточной точке $(\theta x, \theta y)$, где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Но так как начало (0, 0) сейчас находится в точке M_0 на кривой (37), то оно удовлетворяет уравнению кривой и мы имеем

$$F^0 = 0,$$

а так как, кроме того, точка M_0 особая, то в ней

$$F_x^0 = F_y^0 = 0,$$

т. е. имеют место условия (38).

Вставляя теперь в левую часть (37) вместо $F(x, y)$ его разложение, мы получим уравнение кривой в виде

$$\frac{1}{2}(F_{xx}^0 x^2 + 2F_{xy}^0 xy + F_{yy}^0 y^2) + R_2 = 0.$$

Умножим обе части уравнения на 2 и обозначим для краткости в выражении остаточного члена $\frac{1}{3}\widetilde{F}_{xxx}$, $\widetilde{F}_{xxy}$, $\widetilde{F}_{xyy}$, $\frac{1}{3}\widetilde{F}_{yyy}$, соответственно, через A, B, C, D. Получим

$$F_{xx}^0 x^2 + 2F_{xy}^0 xy + F_{yy}^0 y^2 + (Ax^3 + Bx^2 y + Cxy^2 + Dy^3) = 0. \quad (41)$$

Конечно, не нужно забывать, что A, B, C, D суть также функции от x, y и именно в них скрыта вся сложная сторона уравнения (41). При этом можно считать, что A, B, C, D непрерывные функции, имеющие столько же непрерывных частных производных по x, y, сколько их имеют соответственно F_{xxx}, F_{xxy}, F_{xyy}, F_{yyy} [1]).

Мы будем изучать поведение кривой вблизи особой точки $M_0(0, 0)$, т. е. в некоторой окружающей эту точку области, которую для простоты можно взять квадратной и определить условиями

$$|x| < \eta, \quad |y| < \eta.$$

---

[1]) При выводе остаточного члена ряда Тэйлора в двух переменных для $F(x, y)$ обычно рассматривают $F(tx, ty)$, считая x, y произвольно фиксированными, а t переменным. Тогда $F(tx, ty)$ есть функция одного переменного t, которую можно разложить в ряд Тэйлора по степеням t с остаточным членом R_2 в интегральной форме, положив затем $t = 1$. Получается как раз разложение (40), где остаточный член имеет вид

$$R_2 = \frac{1}{2!}\int_0^1 \frac{d^3}{dt^3} F(tx, ty)(1-t)^2\, dt =$$

$$= \frac{x^3}{2}\int_0^1 F_{xxx}(tx, ty)(1-t)^2\, dt + \frac{3x^2 y}{2}\int_0^1 F_{xxy}(tx, ty)(1-t)^2\, dt + \ldots,$$

так что

$$A = \frac{1}{2}\int_0^1 F_{xxx}(tx, ty)(1-t)^2\, dt, \qquad B = \frac{3}{2}\int_0^1 F_{xxy}(tx, ty)(1-t)^2\, dt,$$

и аналогично для C и D.

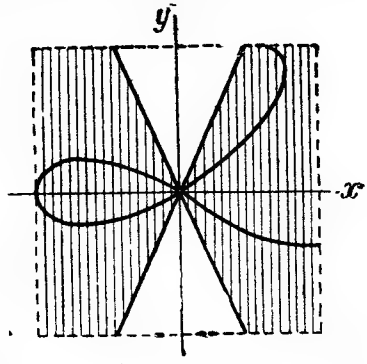
Если, например, F_{xxx} имеет непрерывную производную по x (или по y), то имеет ее и A, причем $\frac{\partial A}{\partial x}$ получится дифференцированием по x под знаком интеграла (см. Гурса, т. I, § 91). Повторяя это дифференцирование нужное число раз, мы докажем наше утверждение о дифференцируемости A, B, C, D.

Ограничимся рассмотрением двойной особой точки, т. е. допустим, что в (41) *у членов* 2-*й степени все коэфициенты сразу не обращаются в нуль.* Для удобства выкладок нам при этом желательно, чтобы среди этих коэфициентов именно для F^0_{yy} было гарантировано необращение в нуль. Но это не составит нового предположения, так как в случае

$$F^0_{yy} = 0$$

мы можем повернуть координатные оси, и тогда остальные члены 2-й степени (не исчезающие тождественно, как мы предположили) выделят в новой системе координат отличный от 0 коэфициент при y^2. Итак, мы считаем

$$F^0_{yy} \neq 0. \qquad (42)$$



Черт. 14.

Докажем теперь, что *в достаточно малой области около* $M_0(0, 0)$ *отношение* $\frac{x}{y}$ *для точек кривой ограничено снизу по абсолютной величине*:

$$\left|\frac{x}{y}\right| > a > 0,$$

т. е. около оси y можно построить пару вертикальных углов, куда точки изучаемой кривой не попадают (черт. 14).

Допустим противное, а именно, что в сколь угодно малой области $|x| < \eta$, $|y| < \eta$ найдутся точки (x, y) на кривой, для которых отношение $\frac{x}{y}$ сколь угодно близко к нулю. Так как эти точки берутся на кривой, то для них удовлетворяется уравнение (41). Разделив обе его части на y^2, получим

$$F^0_{xx}\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2F^0_{xy}\frac{x}{y} + F^0_{yy} + y\left\{A\left(\frac{x}{y}\right)^3 + B\left(\frac{x}{y}\right)^2 + C\frac{x}{y} + D\right\} = 0.$$

Но так как окрестность берется сколь угодно малой, то здесь y сколь угодно мало; а так как в окрестности по предположению находятся точки кривой со сколь угодно малыми отношениями $\frac{x}{y}$, то все члены левой части, кроме F^0_{yy}, сколь угодно малы для этих точек. Но F^0_{yy} постоянное, отличное от нуля, и, следовательно, не может обращаться в нуль при добавлении сколь угодно малых величин. Получилось противоречие, доказывающее наше утверждение.

Итак, в достаточно малой окрестности точки $M_0(0, 0)$ (которой мы и ограничимся) $\left|\frac{x}{y}\right|$ *для точек* $M(x, y)$ *на кривой* ограничено снизу [1]),

[1]) В частности, $\frac{x}{y} \neq 0$; следовательно, x не может обращаться в нуль нигде, за исключением самой точки M_0.

а следовательно, $\left|\frac{y}{x}\right|$ ограничено сверху. Введем для отношения $\frac{y}{x}$ особое обозначение u; имеем

$$u=\frac{y}{x}, \quad |u|<Q, \tag{43}$$

где Q — некоторое постоянное.

Перепишем теперь (41), разделив обе его части на x^2 (см. сноску на стр. 31). Получим, пользуясь обозначением (43),

$$F^0_{xx}+2F^0_{xy}u+F^0_{yy}u^2+x(A+Bu+Cu^2+Du^3)=0. \tag{44}$$

Решим уравнение (44) как квадратное уравнение относительно u; в качестве свободного члена берем F^0_{xx} в сумме с четвертым членом левой части, не обращая внимания на зависимость последнего от u. Получим

$$u=-\frac{F^0_{xy}}{F^0_{yy}}\pm\sqrt{\left(\frac{F^0_{xy}}{F^0_{yy}}\right)^2-\frac{F^0_{xx}+x(A+Bu+Cu^2+Du^3)}{F^0_{yy}}}. \tag{45}$$

Такое выражение для u оказывается полезным, несмотря на то, что в этом выражении u фигурирует в правой части снова. Дело в том, что выражение

$$x(A+Bu+Cu^2+Du^3), \tag{45'}$$

через которое входит u в правой части, стремится к нулю, если заставить точку кривой $M(x, y)$ стремиться по кривой в $M_0(0, 0)$. Действительно, в выражении (45'), как известно из предыдущего, величины A, B, C, D и u ограничены; поэтому выражение становится сколь угодно мало по модулю вместе с x, т. е. вместе с выбором достаточно малой окрестности точки $M_0(0, 0)$.

Итак, ограничиваясь достаточно малой окрестностью, мы делаем выражение (45') сколь угодно близким к нулю, а следовательно, значения u — пользуясь их выражением (45) — сколь угодно близкими к

$$-\frac{F^0_{xy}}{F^0_{yy}}\pm\sqrt{\left(\frac{F^0_{xy}}{F^0_{yy}}\right)^2-\frac{F^0_{xx}}{F^0_{yy}}}.$$

Обозначим через u_1 и u_2 два возможных здесь значения, т. е. два корня квадратного уравнения

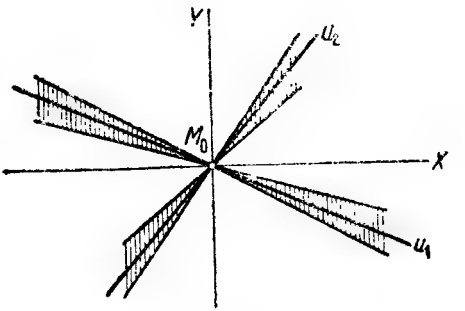
$$F^0_{xx}+2F^0_{xy}u+F^0_{yy}u^2=0. \tag{46}$$

Мы можем окончательно формулировать следующий результат: *Значения u, т. е. отношения $\frac{y}{x}$, для точек изучаемой кривой сколь угодно близки или к u_1, или к u_2, если кривая рассматривается в достаточно малой окрестности своей особой точки $M_0(0, 0)$.*

Точнее: для любого $\varepsilon > 0$ можно указать столь малое η, что для всех точек $M(x, y)$ на кривой внутри окрестности $|x| < \eta$, $|y| < \eta$

$$\text{или } \left|\frac{y}{x} - u_1\right| < \varepsilon, \text{ или } \left|\frac{y}{x} - u_2\right| < \varepsilon. \tag{47}$$

Геометрически условия (47) означают, что угловой коэфициент прямой M_0M, направленной из начала M_0 в какую-нибудь точку M на кривой, сколь угодно мало отличается либо от u_1, либо от u_2, или, что же, что *все точки кривой попадают либо в пару вертикальных углов, сколь угодно тесно охватывающих прямую с угловым коэфициентом u_1, либо в аналогичную пару для u_2, если только кривая рассматривается в достаточно малой окрестности точки M_0* (черт 15.).



Черт. 15.

В той или иной формулировке, полученный результат был главной целью этого параграфа и в дальнейшем послужит основой для окончательного исследования вопроса.

§ 7. Строение кривой вблизи особых точек. Изолированные и узловые точки, точки возврата.

Как ясно заранее, результат предыдущего параграфа будет иметь совершенно различный геометрический смысл в зависимости от характера корней уравнения (46). Мы разберем поэтому отдельно три различных возможных здесь случая.

1-й случай.

$$F^0_{xx}F^0_{yy} - F^{02}_{xy} > 0\ ^1). \tag{48}$$

Корни u_1, u_2 — комплексные сопряженные.

Мы утверждаем, что в этом случае около точки M_0 (0,0) можно выделить столь малую окрестность $|x| < \eta$, $|y| < \eta$, в которой *совершенно нет точек нашей кривой, кроме самой точки M_0* (0, 0).

Допустим противное, т. е. что в сколь угодно малой окрестности точки M_0 найдутся точки нашей кривой, отличные от M_0. Тогда, по основному результату предыдущего параграфа, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать достаточно малую окрестность, в которой для точек кривой имеют место неравенства (47).

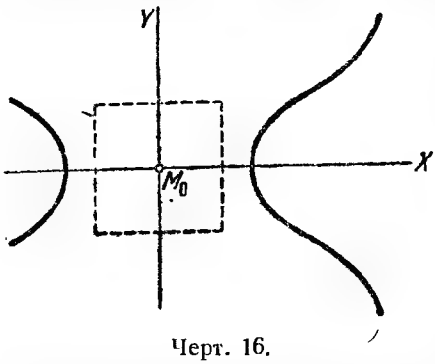
---

1) Выписанное условие имеет одинаковый вид при любом выборе прямоугольной декартовой системы x, y, так как из аналитической геометрии известно, что дискриминант членов 2-й степени в инвариантном выражении — в данном случае в левой части (41) — инвариантен при преобразовании x, y.

Так как ε сколь угодно мало, то это означает, что *действительное* переменное $\frac{y}{x}$ способно неограниченно приближаться к комплексным постоянным u_1, u_2, что невозможно.

Итак, некоторая окрестность M_0 совершенно свободна от точек нашей кривой, за исключением самой N_0 (0, 0). Что же касается M_0, то она принадлежит кривой, что можно проверить, подставив в (41) значения $x = y = 0$.

Такой геометрически несколько неожиданный результат объясняется тем, что у нас кривая была определена как место точек, удовлетворяющих уравнению (2), т. е. более аналитически, чем геометрически. Существование же некоторых точек кривой, лежащих „отдельно", мы теперь уже вынуждены принять как логическое следствие нашего определения.



Черт. 16.

Точка M_0 называется изолированной особой точкой кривой (черт. 16).

Приведем пример. Кривая

$$y^2 = -4x^2 + x^4$$

имеет точку (0, 0) изолированной, ибо при значениях $0 < |x| < 2$ правая часть уравнения отрицательна и не может быть равна y^2 ни при каком действительном значении x. При $|x| > 2$ кривая располагается симметрично относительно обеих осей и состоит целиком из обыкновенных точек.

Кривая $x^2 + y^2 = 0$ вообще состоит из одной только изолированной точки.

2-й случай.

$$F^0_{xx} F^0_{yy} - F^{02}_{xy} < 0. \tag{49}$$

Корни u_1 и u_2 действительные различные.

В этом случае нет оснований думать, что кривая не существует в окрестности точки M_0, но, наученные опытом предыдущего случая, мы должны это существование доказать. Кроме того, у нас нет еще никакого обоснованного представления о том, как расположатся вблизи M_0 точки нашей кривой (если она там существует), кроме результата в конце § 6, указывающего на их сгущение около направлений u_1 и u_2.

Нам придется перейти, вместо x и y, к новым переменным x и u, где $u = \frac{y}{x}$ и, следовательно,

$$y = ux. \tag{50}$$

Так как для точек кривой, попавших в достаточно малую окрестность точки M_0 (0, 0), значения u становятся как угодно близкими

либо к u_1, либо к u_2 (конец § 6), то переменные x, u достаточно рассматривать вблизи значений

$$\text{или} \quad x=0, \quad u=u_1, \quad \text{или} \quad x=0, \quad u=u_2.$$

Ограничиваясь, следовательно, значениями x, u из какой-нибудь окрестности $|x|<\eta$, $|u-u_1|<\varepsilon$ в первом случае и $|x|<\eta$, $|u-u_2|<\varepsilon$ во втором случае, мы не упустим при этом ни одной точки кривой, попавшей внутрь достаточно малой окрестности точки $M_0(0, 0)$ в плоскости x, y.

Для определенности изучим точки, для которых значения x, u лежат в окрестности значений $x=0$, $u=u_1$. Для точек, расположенных вблизи $x=0$, $u=u_2$, все рассуждения повторятся дословно.

Нам уже известно, что, разделив левую часть уравнения (37) на x^2, мы приводим его к виду (44):

$$\frac{F(x, y)}{x^2}\equiv F^0_{xx}+2F^0_{xy}u+F^0_{yy}u^2+x(A+Bu+Cu^2+Du^3)=0.$$

Здесь A, B, C, D — непрерывные и диференцируемые функции от x, y, а следовательно, и от x, u.

Обозначим левую часть этого уравнения, рассматриваемую как функция от x и u, через $\varphi(x, u)$:

$$\varphi(x, u)\equiv F^0_{xx}+2F^0_{xy}u+F^0_{yy}u^2+x(A+Bu+Cu^2+Du^3). \quad (51)$$

Само же уравнение, связывающее x и u, примет вид

$$\varphi(x, u)=0. \quad (52)$$

Вычислим еще частную производную от φ по u:

$$\varphi_u(x, u)=2(F^0_{xy}+F^0_{yy}u)+x\frac{\partial}{\partial u}(A+Bu+Cu^2+Du^3). \quad (53)$$

Посмотрим теперь, что происходит с уравнением (52) при значениях $x=0$, $u=u_1$, в окрестности которых рассматриваются переменные x, u. Вставляя $x=0$, $u=u_1$ в (51), мы видим, что первые три члена дают 0, так как u_1 есть корень уравнения (46); последний же член равен 0 вместе с x.

Итак,

$$\varphi(0, u_1)=0, \quad (54)$$

т. е. уравнение (52) удовлетворяется при $x=0$, $u=u_1$. Что же касается частной производной (53), то она при тех же значениях принимает вид

$$\varphi_u(0, u_1)=2(F^0_{xy}+F^0_{yy}u_1)\neq 0. \quad (55)$$

Неравенство нулю имеет здесь место потому, что в противном случае

$$u_1=-\frac{F^0_{xy}}{F^0_{yy}},$$

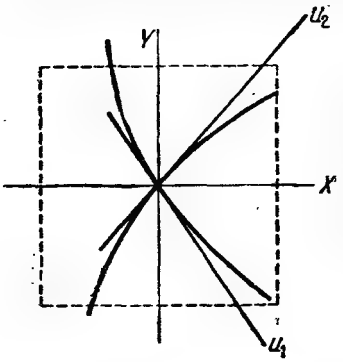
а такой вид корень квадратного уравнения (46) имеет только в случае равных корней и не может иметь сейчас, когда в силу (49) корни u_1, u_2 действительны и различны.

Из (54) и (55) следует [1]), что уравнение (52) в достаточно малой окрестности значений $x=0$, $u=u_1$ однозначно разрешимо относительно u, так что уравнение (52) в пределах этой окрестности можно переписать в виде

$$u=\varphi_1(x), \tag{56}$$

где функция $\varphi_1(x)$ непрерывна и диференцируема нужное число раз. При этом (56) удовлетворяется при $x=0$, $u=u_1$, другими словами,

$$\varphi_1(0)=u_1.$$



Черт. 17.

Уравнение (56) *выражает в простой форме зависимость между* x *и* u *для точек нашей кривой в окрестности значений* $x=0$, $u=u_1$.

Теперь нетрудно, ограничиваясь той же окрестностью, в простой форме переписать уравнение нашей кривой в переменных x, y. А именно, так как $y=ux$, то (56) дает

$$y=x\varphi_1(x). \tag{57}$$

Мы получаем нашу кривую в виде простого отрезка, если ограничиться достаточно малой окрестностью вблизи значений $x=0$, $u=u_1$.

Совершенно аналогично в достаточно малой окрестности значений $x=0$, $u=u_2$ *мы получим кривую в виде*

$$y=x\varphi_2(x), \tag{58}$$

т. е. также в виде простого отрезка.

Другими словами, точки кривой, для которых значения x, u лежат в окрестности значений 0, u_1, образуют простой отрезок (57); а те точки, для которых x, u лежат в окрестности значений 0, u_2, образуют другой простой отрезок (58). Эти два простых отрезка исчерпывают все точки нашей кривой в достаточно малом квадрате $|x|<\eta$, $|y|<\eta$ около точки $M_0(0, 0)$ в плоскости x, y, потому что в силу результата (47), полученного в конце § 6, значения x, u для таких точек обязательно попадут в первую или вторую окрестность.

Очевидно, что простые отрезки (57) и (58) проходят оба через точку $x=0$, $y=0$ (убеждаемся подстановкой), так что в данном случае *особая точка образована в пересечении двух простых отрезков, принадлежащих оба изучаемой кривой.*

Такая особая точка называется *узловой*, или точкой *самопересечения* (черт. 17). Угловой коэфициент касательной к простому

[1]) Теорема существования неявной функции, см. Гурса, т. I, § 32.

отрезку (57) в точке $M_0(0, 0)$ легко получить, диференцируя:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x) + x\varphi_1'(x)$$

и подставляя затем $x = 0$:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \varphi_1(0) = u_1.$$

Аналогично угловой коэфициент касательной к (58) в точке $M_0(0, 0)$ равен u_2.

Элементарным примером узловой точки служит точка (0, 0) на кривой $y^2 - x^2 = 0$. Кривая эта представляет собой пару прямых, делящих пополам углы между осями и пересекающихся в начале. Другим примером может служить лемниската $(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = a^4$. Эта кривая имеет форму восьмерки с точкой самопересечения в начале координат.

Нам остается разобрать

3-й случай.

$$F^0_{xx}F^0_{yy} - F^{0^2}_{xy} = 0.$$

Корни уравнения (46) u_1, u_2 действительные равные, т. е.

$$u_1 = u_2 = -\frac{F^0_{xy}}{F^0_{yy}}. \tag{59}$$

Снова переходим, вместо x, y, к переменным x, u, где $u = \frac{y}{x}$. Пользуясь результатом (47), полученным в конце § 6, утверждаем, что если (x, y) есть точка на кривой в достаточно малой окрестности $|x| < \eta$, $|y| < \eta$ около $M_0(0, 0)$, то значения x, u находятся в сколь угодно малой окрестности значений 0, u_1 [теперь оба неравенства (47) означают одно и то же, так как $u_2 = u_1$]. В дальнейшем мы ограничиваемся некоторой окрестностью значений $x = 0$, $u = u_1$. Прежним путем приводим уравнение кривой к виду (52):

$$\varphi(x, u) = 0, \tag{60}$$

где

$$\varphi(x, u) \equiv F^0_{xx} + 2F^0_{xy}u + F^0_{yy}u^2 + x(A + Bu + Cu^2 + Du^3). \tag{61}$$

Однако дальше нам не удастся повторить исследование в том виде, как оно шло для 2-го случая. Дело в том, что, вычисляя значение $\varphi_u(x, u)$ при $x = 0$, $u = u_1$, мы получим совершенно тем же путем, как в формуле (55),

$$\varphi_u(0, u_1) = 2(F^0_{xy} + F^0_{yy}u_1);$$

но это выражение, в противоположность формуле (55), будет заведомо равно нулю — достаточно сослаться на выражение (59) для u_1. Итак,

$$\varphi_u(0, u_1) = 0, \tag{62}$$

и мы не можем применить теорему существования неявной функции так, как это было сделано во 2-м случае.

Заметим, что, дифференцируя выражение (61) для $\varphi(x, u)$ по u два раза и подставляя в результат $x=0$, $u=u_1$, мы получим [согласно (42)]:

$$\varphi_{uu}(0, u_1)=2F^0_{yy}\neq 0. \tag{62'}$$

Не имея возможности выразить u через x из уравнения (60) вблизи значений $x=0$, $u=u_1$, попытаемся выразить, наоборот, x через u. Найдем частную производную

$$\varphi_x(x, u)=(A+Bu+Cu^2+Du^3)+x\frac{\partial}{\partial x}(A+Bu+Cu^2+Du^3).$$

Положим здесь $x=0$, $u=u_1$; второй член обращается в нуль вместе с x. Что же касается первой скобки, то здесь нужно вспомнить, что через A, B, C, D обозначены $\frac{1}{3}F_{xxx}$, F_{xxy}, F_{xyy}, $\frac{1}{3}F_{yyy}$ при значениях аргументов θx и θy (см. начало § 6). Когда мы положим $x=0$, $u=u_1$, то y, равное ux, тоже обращается в нуль, и эти частные производные 3-го порядка получат аргументы $x=0$, $y=0$, что мы обозначим нулем наверху. В результате

$$\varphi_x(0, u_1)=\frac{1}{3}(F^0_{xxx}+3F^0_{xxy}u+3F^0_{xyy}u^2+F^0_{yyy}u^3)_{u=u_1}. \tag{63}$$

Весь вопрос теперь в том, является ли u_1, т. е. двойной корень квадратного уравнения (46)

$$F^0_{xx}+2F^0_{xy}u+F^0_{yy}u^2=0,$$

в то же самое время корнем кубического полинома, стоящего в правой части (63). Никаких причин общего характера для этого нет, и лишь в отдельных исключительных случаях, когда квадратный и кубический полиномы (46) и (63) почему-либо имеют общий корень u_1 [двойной для (46)], выражение (63) обращается в нуль.

Этот случай, требующий дополнительных исследований и приводящий к иным формам строения кривой вблизи данной особой точки, *мы оставим в стороне.*

Ограничимся основным случаем, когда u_1 не обращает в нуль кубический полином, и, следовательно,

$$\varphi_x(0, u_1)\neq 0. \tag{64}$$

К этому следует добавить, что, подставляя $x=0$, $u=u_1$ в (61) и учитывая, что u_1 есть корень уравнения (46), мы получаем

$$\varphi(0, u_1)=0. \tag{65}$$

Снова применяем теорему существования неявной функции, на этот раз к x, как функции u. А именно, переменные x, u связаны вдоль кри-

вой уравнением (60), левая часть которого $\varphi(x, u)$ удовлетворяет при значениях $x=0$, $u=u_1$ условиям (64) и (65). Отсюда следует, что в достаточно малой окрестности значений $x=0$, $u=u_1$ уравнение (60) однозначно разрешается относительно x и может быть переписано в виде

$$x = x(u). \tag{66}$$

Так как уравнение (60) удовлетворяется при $x=0$, $u=u_1$, то равносильное ему уравнение (66) тоже удовлетворяется, и мы имеем

$$x(u_1) = 0. \tag{67}$$

Так как у нас $u=\frac{y}{x}$, то легко написать выражение для y:

$$y = ux(u). \tag{68}$$

Уравнения (66), (68) дают параметрическое представление нашей кривой в окрестности значений $x=0$, $u=u_1$ для переменных x, u, или, что то же самое (см. начало исследования 3-го случая), в некоторой окрестности точки $M_0(0, 0)$ в плоскости x, y. По нему нетрудно составить себе представление о ходе кривой вблизи исследуемой особой точки. Вычислим прежде всего $x'(u)$. Так как (66) есть разрешенное относительно x уравнение (60), то по формуле дифференцирования неявной функции имеем

$$x'(u) = -\frac{\varphi_u(x, u)}{\varphi_x(x, u)}, \quad x''(u) = -\frac{[\varphi_{uu} + \varphi_{ux}x'(u)]\varphi_x - \varphi_u\frac{d}{du}\varphi_x}{\varphi_x^2}.$$

Положим теперь $u=u_1$, тогда $x=0$ и, в силу (62),

$$x'(u_1) = 0, \text{ а следовательно, } x''(u_1) = -\frac{\varphi_{uu}(0, u_1)}{\varphi_x(0, u_1)} \neq 0 \ ^1). \tag{69}$$

Разложим теперь (66) в ряд Тэйлора по степеням $u-u_1$. Так как значения функции $x(u)$ и ее первой производной [согласно (67) и первой из формул (69)] обращаются в нуль при $u=u_1$, то разложение начнется с членов второй степени:

$$x(u) = \frac{1}{2}x''(u_1)(u-u_1)^2 + R_2,$$

где

$$R_2 = \frac{1}{6}x'''(\tilde{u})(u-u_1)^3,$$

причем $\tilde{u}$ — некоторое промежуточное значение между u_1 и u.

Обозначая для краткости $\frac{1}{2}x''(u_1) \neq 0$ через a, запишем

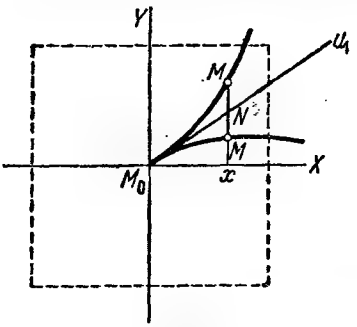
$$x(u) = a(u-u_1)^2 + R_2. \tag{70}$$

---

[1]) См. (62′) и (64).

Рассматривая u вблизи u_1, мы можем считать $u-u_1$ как положительным, так и отрицательным, т. е. как $u>u_1$, так и $u<u_1$. В обоих случаях первый член разложения (70) будет сохранять один и тот же знак, именно, знак a. А вместе с ним сохраняет тот же знак и все разложение, так как при достаточно малой разности $|u-u_1|$ остаточный член R_2, содержащий $(u-u_1)^3$, станет как угодно мал по абсолютной величине сравнительно с первым членом, содержащим только $(u-u_1)^2$.

Таким образом при достаточно малом $|u-u_1|$, т. е. в достаточно малой окрестности точки $M_0(0, 0)$, $x(u)$ сохраняет все время один и тот же знак, так что *кривая располагается по одну сторону оси Y.*



Черт. 18.

Перепишем формулу (68), отняв от обеих частей равенства по u_1x:

$$y-u_1x=(u-u_1)x. \qquad (71)$$

Очевидно, что u_1x есть ордината прямой с угловым коэфициентом u_1, проведенной через начало M_0. Следовательно, левая часть (71) есть *уклонение NM* нашей кривой от прямой u_1 *по ординате*. Итак,

$$NM=(u-u_1)x. \qquad (72)$$

Так как x сохраняет постоянный знак, то это выражение меняет знак в зависимости от того, берем ли мы $u<u_1$ или $u>u_1$. В первом случае точки кривой располагаются по одну сторону прямой u_1, во втором случае — по другую (на черт. 18 соответственно книзу и кверху).

Итак, кривая подходит к точке $M_0(0, 0)$ двумя ветвями, отвечающими значениям $u\leqslant u_1$ и $u\geqslant u_1$, обе — по одну сторону от оси Y, но одна книзу от прямой u_1, а другая кверху от этой прямой.

Чтобы окончательно составить себе представление о ходе кривой, заметим, что при u, стремящемся к u_1, т. е. при стремлении точки M по кривой в точку M_0, x, согласно (70), есть бесконечно малое 2-го порядка, а NM, согласно (72), бесконечно малое 3-го порядка относительно $u-u_1$. Таким образом уклонение NM кривой от прямой u_1 является бесконечно малым высшего порядка сравнительно с абсциссой x. Это имеет место, разумеется, для каждой из двух ветвей нашей кривой, которые, таким образом, сближаются с прямой u_1 быстрее, чем с осью Y. Наглядно на чертеже это сказывается в том, что две ветви нашей кривой, прилегая к прямой u_1 сверху и снизу, образуют в M_0 заострение.

В связи с этим особая точка M_0 называется в этом случае *точкой заострения* или *возврата* [1]). Так как отношение $\frac{y}{x}=u$ при стрем-

[1]) Более детальное исследование показывает, что существуют (в случаях, которые мы опустили) еще точки возврата другого типа (см. пример ниже); в связи с этим рассмотренные нами точки возврата называются *точками возврата 1-го рода.*

лении M в M_0 по кривой (по той или другой ветви безразлично) стремится, очевидно, к u_1, то угловой коэфициент секущей M_0M имеет для обеих ветвей предельное значение u_1. Следовательно, прямую с угловым коэфициентом u_1 можно считать общей касательной для обеих ветвей кривой в точке возврата.

Приведем несколько примеров.

В случае полукубической параболы

$$F(x, y) \equiv y^2 - x^3 = 0$$

мы имеем в начале координат двойную точку, причем

$$F^0_{xx} = 0, \quad F^0_{xy} = 0, \quad F^0_{yy} = 2, \quad F^0_{xx}F^0_{yy} - F^{0^2}_{xy} = 0,$$

т. е. имеет место третий случай. Формула (59) дает $u_1 = u_2 = 0$, и полином (63) совпадает с $\frac{1}{3}F^0_{xxx}$, т. е. имеет значение -2. Так как соблюдено условие (64), то мы имеем здесь разобранный случай — точку возврата 1-го рода (сделать чертеж кривой).

В случае кривой

$$F(x, y) \equiv (y - x^2)^2 - x^5 = 0$$

выкладки дадут те же результаты, только $\frac{1}{3}F^0_{xxx}$ будет иметь теперь значение не -2, а 0. Условие (64) не соблюдено, мы имеем случай, который выше мы оставили в стороне.

Уравнение кривой можно переписать в виде

$$y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}},$$

откуда легко составить представление о ходе кривой. Здесь мы имеем точку возврата 2-го рода: обе ветви расположены вблизи O не только по одну сторону их общей нормали — оси OY, но и по одну сторону их общей касательной — оси OX.

При несоблюдении условия (64) возможны и другие специальные случаи, например,

$$y^2 - x^4 = 0,$$

когда кривая распадается на две параболы $y = \pm x^2$, касающиеся друг друга в точке 0. Здесь особая точка представляет собой *точку самоприкосновения* кривой.

Укажем дополнительно как обстоит дело *в случае параметрического задания кривой* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Мы знаем, что вблизи данного значения $t = t_0$ кривая имеет форму простого отрезка, если хоть одна из производных $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$ отлична от нуля. Если же в данной точке M_0 обе эти производные обратились в нуль, $\varphi'(t_0) = \psi'(t_0) = 0$, но

$$(\varphi'''\psi'' - \psi'''\varphi'')_{t=t_0} \neq 0, \qquad (*)$$

то оказывается, что кривая имеет точку возврата первого рода. Действительно, перенесем для упрощения выкладок начало координат в изучаемую точку M_0, так что теперь $\varphi(t_0) = \psi(t_0) = 0$, и разложим $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ в ряды Тэйлора по степеням $t - t_0$:

$$x = \frac{1}{2}\varphi''(t_0)(t-t_0)^2 + \ldots, \quad y = \frac{1}{2}\psi''(t_0)(t-t_0)^2 + \ldots$$

Ясно, что, как и раньше, кривая лежит по одну сторону от OY, причем x — бесконечно малое 2-го порядка относительно $t - t_0$.

Проведем через M_0 прямую с угловым коэфициентом $\frac{\psi''(t_0)}{\varphi''(t_0)}$ и вычислим уклонение NM нашей кривой от этой прямой по ординате, т. е. разность ординат:

$$\text{для кривой } y = \frac{1}{2}\psi''(t_0)(t-t_0)^2 + \ldots,$$

$$\text{для прямой } \frac{\psi''(t_0)}{\varphi''(t_0)}x = \frac{\psi''(t_0)}{\varphi''(t_0)}\left[\frac{1}{2}\varphi''(t_0)(t-t_0)^2 + \ldots\right].$$

В силу условия (*) NM будет бесконечно малым точно 3-го порядка относительно $t - t_0$, т. е. снова получаем всю картину точки возврата первого рода.

Упражнения.

1. *Эпициклоидой* называется кривая, описываемая какой-нибудь точкой M подвижной окружности (радиус обозначим через λa, где λ, $a > 0$), которая катится без скольжения [1]) по неподвижной окружности (радиуса a), находясь вне последней. Если же подвижная окружность катится по неподвижной, находясь внутри ее, то полученная кривая называется *гипоциклоидой*. (В этом случае, очевидно, $\lambda < 1$).

Показать, что если за начало координат принят центр неподвижной окружности, а ось X проведена через точку M в том ее положении, когда она попадает на неподвижную окружность и служит точкой касания, то уравнения эпициклоиды и гипоциклоиды имеют соответственно вид

$$\frac{x}{a} = (1+\lambda)\cos\lambda\varphi - \lambda\cos(1+\lambda)\varphi,$$

$$\frac{y}{a} = (1+\lambda)\sin\lambda\varphi - \lambda\sin(1+\lambda)\varphi$$

и

$$\frac{x}{a} = (1-\lambda)\cos\lambda\varphi + \lambda\cos(\lambda-1)\varphi,$$

$$\frac{y}{a} = (1-\lambda)\sin\lambda\varphi + \lambda\sin(\lambda-1)\varphi,$$

где параметр φ — выраженная в радианах дуга, пробегаемая точкой касания *по подвижной* окружности. Показать, что в точках, где φ кратно 2π, эпи- и гипоциклоиды имеют точки возврата, лежащие на неподвижной окружности, причем касательная направлена по радиусу этой окружности.

---

[1]) Это значит, что точка касания пробегает равные пути по обеим окружностям.

Начертить примерный ход эпициклоид при $\lambda = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$. Полученная в последнем случае эпициклоида называется *кардиоидой*; записать ее уравнение в форме $F(x, y) = 0$.

Начертить ход гипоциклоид при $\lambda = \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$. Кривая, полученная в первом случае, называется *астроидой*.

Составить уравнение нормали в произвольной точке эпи(гипо)циклоиды и показать, что она проходит через соответствующее положение точки касания обеих окружностей.

2. *Циклоидой* называется кривая, описываемая какой-нибудь точкой окружности (радиус a), катящейся без скольжения по неподвижной прямой (принимаемой за ось X). Вывести уравнения циклоиды

$$\frac{x}{a} = \varphi - \sin\varphi, \quad \frac{y}{a} = 1 - \cos\varphi$$

(здесь φ — угол поворота катящейся окружности) и доказать, что при φ кратных 2π циклонда имеет точки возврата на неподвижной прямой с касательными, перпендикулярными к этой прямой. Показать, что нормаль к циклонде проходит через соответствующее положение точки касания окружности и неподвижной прямой.

§ 8. Семейство кривых на плоскости вблизи данной точки.

До сих пор мы рассматривали отдельную кривую, заданную уравнением (2), $F(x, y) = 0$.

Во многих случаях приходится иметь дело с целым семейством кривых. Под *однопараметрическим семейством кривых* мы понимаем множество кривых, определяемое уравнением

$$F(x, y, C) = 0, \tag{73}$$

которое называется *уравнением семейства*. Здесь C — некоторое переменное (параметр), имеющее определенную область изменения $C_1 \leqslant C \leqslant C_2$, в частности, может быть, меняющееся от $-\infty$ до $+\infty$.

Уравнение (73) определяет множество кривых в том смысле, что всякий раз, когда C принимает определенное постоянное значение, уравнение (73) связывает только x и y и дает определенную кривую; множество таких кривых (C), отвечающих всевозможным значениям C, и называется однопараметрическим семейством кривых.

Кривые, входящие в семейство, могут иметь как обыкновенные, так и особые точки. Оставим пока в стороне особые точки и будем рассматривать на кривых семейства лишь заведомо обыкновенные точки, т. е. точки, где $F_x(x, y, C)$ и $F_y(x, y, C)$ не обращаются в нуль одновременно.

Итак, пусть C имеет фиксированное значение C_0, т. е. из семейства (73) выбрана определенная кривая, и x, y также фиксированы, т. е. на этой кривой выбрана определенная точка $M_0(x_0, y_0)$. Так как точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на кривой (C_0), то

$$F(x_0, y_0, C_0) = 0, \tag{74}$$

и так как точка заведомо обыкновенная, то пусть, для определенности,

$$F_y(x_0, y_0, C_0) \neq 0\ ^1). \tag{75}$$

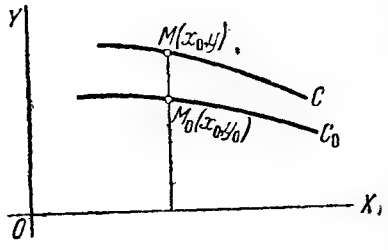
Весь этот параграф посвящен изучению семейства кривых вблизи такой точки и при значениях C, близких к C_0.

Сопоставляя условия (74) и (75), мы на основании теоремы существования неявной функции (Гурса, т. I, § 32) можем утверждать, что при значениях переменных x, y, C, *близких* к x_0, y_0, C_0, уравнение (73) однозначно разрешимо относительно y и может быть переписано в виде

$$y = \varphi(x, C), \tag{76}$$

причем

$$y_0 = \varphi(x_0, C_0). \tag{77}$$



Черт. 19.

Итак, уравнение семейства может быть переписано в виде (76), но лишь в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и *лишь для кривых, достаточно близких по значению* C *к* C_0.

Перейдем к другому значению C, близкому к C_0. Получим другую кривую семейства. Выясним, каково расстояние по ординате между данной точкой M_0 на кривой (C_0) и кривой (C).

Для точки M_0 на кривой (C_0) мы имеем ординату $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$, а для точки M на кривой (C) (при том же $x = x_0$, черт. 19) $y = \varphi(x_0, C)$. Расстояние между кривыми по ординате имеет вид

$$M_0M = y - y_0 = \varphi(x_0, C) - \varphi(x_0, C_0).$$

Оценим степень малости этого расстояния между кривыми (C_0) и (C) сравнительно с приращением параметра $C - C_0$. Возьмем отношение

$$\frac{M_0M}{C - C_0} = \frac{\varphi(x_0, C) - \varphi(x_0, C_0)}{C - C_0} \tag{78}$$

и заставим параметр C стремиться к значению C_0. Тогда кривая (C) неограниченно приближается к кривой (C_0); точнее, ордината $y = \varphi(x_0, C)$ стремится к $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$, и, следовательно, точка M стремится в точку M_0 по вертикали (x_0, C_0 предполагаются все время фиксированными). Отношение (78) стремится, очевидно, к пределу, равному частной производной $\frac{\partial \varphi}{\partial C}$ при $x = x_0$, $C = C_0$:

$$\lim \frac{M_0M}{C - C_0} = \left[\frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial C}\right]_{\substack{x = x_0 \\ C = C_0}}.$$

Но $\frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial C}$ есть в сущности частная производная по C от y, где

---

[1]) В противном случае мы поменяли бы обозначения осей координат.

y — функция, неявно определяемая уравнением (73); по формуле дифференцирования неявной функции

$$\frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial C} = -\frac{F_C(x, y, C)}{F_y(x, y, C)} \tag{79}$$

и, следовательно,

$$\lim \frac{M_0M}{C - C_0} = -\frac{F_C(x_0, y_0, C_0)}{F_y(x_0, y_0, C_0)}. \tag{80}$$

Разберем два возможных здесь случая.

1-й случай.

$$F_C(x_0, y_0, C_0) \neq 0. \tag{81}$$

В этом случае точка (x_0, y_0) на кривой C_0 есть, как мы будем говорить, точка общего положения, в том смысле, что практически для произвольно взятой точки на произвольной кривой семейства мы должны ожидать соблюдения этого неравенства, и лишь в исключительных случаях имеет место равенство

$$F_C(x, y, C) = 0.$$

[Действительно, если бы это равенство имело место сплошь для всех точек на всех кривых семейства (или хотя бы внутри некоторой области на плоскости x, y), то $F(x, y, C)$ фактически не зависело бы от C, и кривые семейства (73) все (или по крайней мере в этой области) совпадали бы между собой, — случай, который практически мы устраняем из рассмотрения.]

Итак, предположим, что имеет место (81), а значит, как видно из (80),

$$\lim \frac{M_0M}{C - C_0} \neq 0.$$

Это показывает, что *расстояние M_0M по вертикали между точкой M_0 на кривой (C_0) и кривой (C) есть бесконечно малое одного порядка с приращением параметра $C - C_0$ при переходе от кривой (C_0) к (C).*

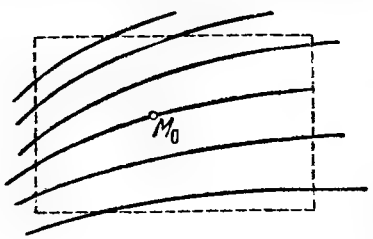
Мы можем составить себе ясное представление о поведении семейства кривых, *если ограничиться достаточно малой областью около точки x_0, y_0 и значениями C, достаточно близкими к C_0.* Тогда, как было уже показано, уравнение семейства можно переписать в виде (76) $y = \varphi(x, C)$, причем $\left[\frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial C}\right]_{\substack{x = x_0 \\ C = C_0}} \neq 0$, как следует из (79) и (81).

В силу непрерывности $\frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial C}$ в рассматриваемой области сохраняет постоянный знак, тот же, что она имеет при $x = x_0$, $C = C_0$. Будем считать для определенности $\frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial C} > 0$.

Тогда при фиксированном x и возрастающем C значение y в уравнении (76) монотонно растет, так что из двух кривых при разных

значениях $C=C_1$ и $C=C_2$, $C_2>C_1$, кривая (C_2) располагается существенно „выше" кривой (C_1) (т. е. при одинаковых x имеет бо́льшие ординаты) и, следовательно, не может пересекаться с нею. Кроме того, очевидно, что уравнение (76) при каждом фиксированном C дает нам кривые семейства в виде простых отрезков: y выражается явно функцией x.

Как мы только что выяснили, отрезки эти располагаются „слоисто" друг над другом, не пересекаясь. Такова картина строения семейства вблизи точки общего положения (чертеж 20).



Черт. 20.

2-й случай.

$$F_C(x_0,\ y_0,\ C_0)=0. \qquad (82)$$

В этом случае точку $M_0(x_0,\ y_0)$ мы будем называть *характеристической точкой* семейства. Итак, характеристической точкой семейства называется всякая точка x_0, y_0, являющаяся заведомо обыкновенной точкой некоторой кривой (C_0) семейства, если в этой кривой соблюдается условие (82). Следует подчеркнуть, что точки 1-го и 2-го случая различаются не по своему отношению к кривой (C_0), на которой они лежат, — и те и другие обыкновенные точки на (C_0), — а по своему отношению к *семейству* кривых.

Сопоставляя (80) и (82), получаем:

$$\lim \frac{M_0M}{C-C_0}=0,$$

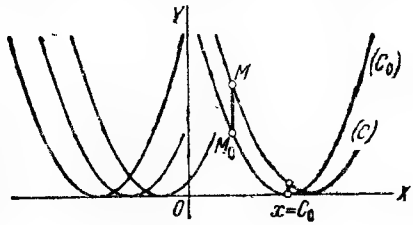
т. е. *расстояние M_0M по вертикали между точкой M_0 на кривой (C_0) и кривой (C) есть бесконечно малое высшего порядка сравнительно с приращением параметра $C-C_0$*. Таким образом на данной кривой (C_0) характеристические точки выделяются из числа остальных тем, что вблизи этих точек кривые семейства (C) особенно сгущаются около (C_0); в то время как в точке общего положения расстояние между кривыми „по вертикали" — бесконечно малое того же порядка, что и разность параметров $C-C_0$, в характеристической точке это расстояние есть бесконечно малое высшего порядка.

Чтобы представить себе это наглядно, рассмотрим типический пример — семейство парабол, полученное из параболы $y=x^2$ ее параллельным перенесением по направлению оси x. Если через C обозначить расстояние, на которое парабола сдвинута, то уравнение семейства будет

$$y-(x-C)^2=0, \qquad (83)$$

где C принимает всевозможные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Фиксируем некоторое значение $C=C_0$, чем указывается одна из парабол (C_0) с вершиной в $x=C_0$. Заставим теперь C стремиться к C_0, тогда парабола (C) неограниченно приближается к (C_0). Возьмем на (C_0) фикси-

рованную точку M_0, тогда расстояние M_0M между кривыми по вертикали, как легко подсчитать, будет бесконечно малое того же порядка, что и $C-C_0$, если M_0 не попало в вершину параболы (C_0). Если же M_0 перенести в вершину (C_0), $x=C_0$, $y=0$, то здесь расстояние по вертикали от (C) оказывается бесконечно малым высшего порядка сравнительно с $C-C_0$. Это довольно ясно видно на черт. 21. Таким образом вершины парабол, т. е. точки оси X, будут характеристическими точками семейства. Проверим это выкладкой. Производная по C от левой части (83) равна $2(x-C)$, следовательно, обращается в нуль в вершине каждой параболы (где $x=C$); для вершин парабол выполняется, таким образом, условие (82). Кривые семейства будут „сгущаться" около оси X.



Черт. 21.

В этом параграфе мы изучали поведение семейства вблизи фиксированной точки на фиксированной кривой, причем играл большую роль порядок малости расстояния „по вертикали", т. е. по направлению, параллельному оси Y. Может показаться поэтому, что результаты исследования зависят не только от семейства кривых, но и от выбора системы прямоугольных координат. Однако это не так, потому что при преобразовании координат значения функции $F(x, y, C)$ остаются прежними (если оставаться в прежней точке и при прежних значениях C), а следовательно, $F_C(x, y, C)$ тоже сохраняет прежнее значение, и условия (81) и (82) не меняют своего вида. В результате наше разделение точек на *характеристические* и *общего положения* имеет один и тот же смысл в любой системе x, y. Правда, для выполнения построений, связанных с этими точками, использовано еще условие (75); но это условие (в заведомо обыкновенной точке) также имеет место в любых координатах, если только не выбирать ось Y параллельно касательной в рассматриваемой точке.

В заключение докажем теорему, подчеркивающую роль характеристических точек как точек „сгущения" кривых семейства.

Если кривые (C_0) и (C) семейства пересекаются между собой и точка пересечения M при C, стремящемся к C_0, движется по (C_0), стремясь к предельному положению M_0, то M_0 (если она обыкновенная) есть характеристическая точка (черт. 22).

Так как точка $M(x, y)$ лежит на обеих кривых $F(x, y, C_0)=0$, $F(x, y, C)=0$, то

$$F(x, y, C)-F(x, y, C_0)=0.$$

или, по теореме о конечном приращении,

$$F_C(x, y, C_1)=0, \tag{84}$$

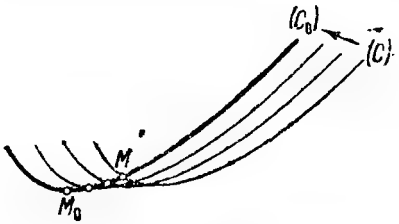
где C_1 заключено между C_0 и C. Пусть теперь $C\to C_0$, тогда, очевидно,

$C_1 \to C_0$ и по предположению $x \to x_0$, $y \to y_0$, где x_0, y_0 — координаты M_0. Переходя к пределу в (84), получим

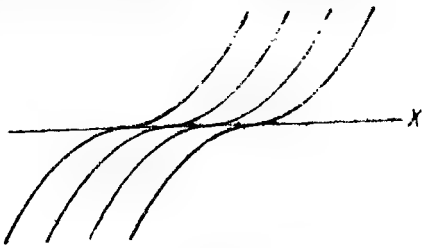
$$F_C(x_0, y_0, C_0) = 0,$$

т. е. для точки $M(x_0, y_0)$ на кривой (C_0) выполняется условие (82). Теорема доказана.

Практически в большинстве случаев имеет место и обратное, т. е. характеристические точки суть предельные положения точек пересечения



Черт. 22.



Черт. 23.

при неограниченном сближении пересекающихся кривых. Однако не всегда: так, например, в семействе кубических парабол

$$y = (x - C)^3$$

совсем нет пересекающихся кривых, тем не менее, как легко проверить, на каждой параболе (C) есть характеристическая точка $x = C$, $y = 0$ (черт. 23).

§ 9. Огибающая и геометрическое место особых точек.

До сих пор мы рассматривали поведение семейства кривых (73) вблизи одной точки. При изучении семейства в целом играет большую роль прежде всего понятие огибающей. А именно, во многих случаях удается найти кривую Γ, которая в каждой своей точке касается некоторой кривой семейства. Таким образом все кривые семейства (по крайней мере в некоторой области изменения параметра C) подходят к кривой Γ, касаются ее и „возвращаются назад", т. е. продолжают свое течение, оставаясь по ту же сторону от Γ (черт. 21 и 24). Таким образом кривая Γ „огибает" кривые семейства, разделяя плоскость на часть, занятую ими, и на часть, куда кривые семейства не заходят. Однако возможны и исключительные случаи (черт. 23), когда кривые семейства касаются Γ, „перегибаясь" через нее; тогда такого разделения не происходит.

Дадим теперь точные определения. Мы назовем *огибающим отрезком* простой отрезок [1])

$$y = f(x), \quad \text{где} \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \tag{85}$$

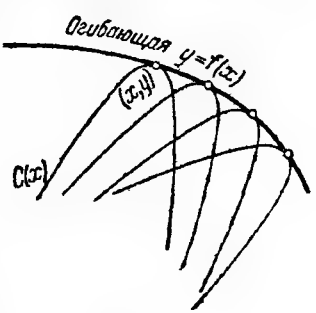
[1]) Для определенности полагаем, что вдоль него именно y есть функция x в противном случае меняем обозначения осей. Это же будет предполагаться в аналогичных случаях и в последующем.

если можно указать такую функцию

$$C = C(x), \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \tag{86}$$

что при каждом значении x параметр $C(x)$ определяет кривую семейства, касающуюся отрезка (85) в его точке x, y, т. е. имеющую эту точку своей обыкновенной точкой и в ней общую касательную с отрезком (85).

Более наглядно: когда, меняя x, мы движемся по отрезку (85), $C(x)$ определяет для каждой точки отрезка параметр той кривой семейства, которая касается отрезка в этой точке (черт. 24).



Черт. 24.

Мы ограничимся рассмотрением огибающих отрезков лишь в достаточно малых кусках, где $C'(x)$ сохраняет постоянный знак,

$$C'(x) \neq 0. \tag{87}$$

Это означает, что $C(x)$ меняется монотонно, не возвращаясь к прежним значениям, т. е. что, двигаясь по отрезку (85), мы касаемся все новых и новых кривых семейства.

Теперь выясним, каким условиям удовлетворяют точки огибающих отрезков. Запишем прежде всего, что через любую точку x, $y = f(x)$ отрезка проходит кривая семейства с параметром $C(x)$:

$$F[x, f(x), C(x)] = 0. \tag{88}$$

Так как это имеет место при любом значении x, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, то (88) есть тождество относительно x и его можно почленно продифференцировать по x (рассматривая левую часть, как сложную функцию). Получим, снова для каждой точки отрезка (85),

$$F_x + F_y f'(x) + F_C C'(x) = 0. \tag{89}$$

Запишем теперь для той же самой точки равенство угловых коэфициентов касательных, с одной стороны, к отрезку (85) — это будет $f'(x)$, и, с другой стороны, к кривой семейства с параметром $C(x)$ — это будет $-\frac{F_x}{F_y}$ [см. уравнение касательной (17)]. Итак,

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y} \quad \text{или} \quad F_x + F_y f'(x) = 0. \tag{90}$$

В уравнениях (89) и (90) речь идет об одной и той же точке x, $y = f(x)$ на огибающем отрезке и об одной и той же кривой семейства с параметром $C(x)$, касающейся огибающего отрезка в этой точке, так что значения аргументов, а именно x, $y = f(x)$, $C = C(x)$ под знаком F, одни и те же.

Сравнивая (89) и (90), замечаем, что

$$F_C[x, f(x), C(x)]\, C'(x) = 0,$$

откуда в силу (87)

$$F_C[x, f(x), C(x)] = 0. \tag{91}$$

Итак, *всякая точка* x, $y = f(x)$ *на огибающем отрезке есть в то же время обыкновенная точка на кривой семейства с параметром* $C = C(x)$, *причем удовлетворяется условие* (91); *другими словами, это — характеристическая точка* [сравнить с условием (82)]. *Огибающий отрезок состоит, таким образом, целиком из характеристических точек.*

До сих пор мы рассматривали на кривых семейства лишь точки, заведомо обыкновенные, т. е. в которых $F_x(x, y, C)$ и $F_y(x, y, C)$ не обращались в нуль сразу, причем считали для определенности именно $F_y(x, y, C) \neq 0$.

Теперь рассмотрим *геометрическое место всевозможных особых точек всевозможных кривых нашего семейства.* Речь идет, следовательно, о точках (x, y), которые являются особыми хотя бы для одной кривой семейства, т. е. для которых можно подобрать параметр C так, что $F(x, y, C) = 0$ (кривая семейства проходит через точку), и, кроме того, $F_x(x, y, C) = F_y(x, y, C) = 0$ (точка для этой кривой — особая).

Мы имеем здесь три уравнения между тремя величинами x, y, C. Они могут быть просто несовместны, т. е. кривые лишены особых точек. Например, для семейства парабол (83) $F(x, y, C) \equiv y - (x - C)^2 = 0$, уравнение $F_y = 1 = 0$ невозможно.

Они могут определять отдельные особые точки. Например, семейство концентрических окружностей с центром в начале: $F(x, y, C) \equiv x^2 + y^2 - C^2 = 0$; присоединяя $F_x = 2x = 0$, $F_y = 2y = 0$, получаем точку $x = y = 0$ и значение $C = 0$. И действительно, значение $C = 0$ определяет окружность радиуса 0, состоящую из единственной точки (начала), которая является, таким образом, изолированной особой точкой. Других особых точек нет.

Возможно, наконец, что существует целая кривая, состоящая из особых точек кривых семейства. Дадим точные определения.

Назовем *отрезком особых точек* простой отрезок

$$y = f(x), \quad \text{где} \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \tag{92}$$

если можно указать такую функцию

$$C = C(x), \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \tag{93}$$

что при каждом значении x параметр $C(x)$ определяет кривую семейства, имеющую соответствующую точку отрезка x, $y = f(x)$ своей особой точкой.

Более наглядно: когда, меняя x, мы движемся по отрезку (92), $C(x)$ определяет для каждой точки отрезка параметр той кривой семейства, которая эту точку имеет своей особой точкой.

Снова ограничиваемся рассмотрением отрезков особых точек в достаточно малых кусках, где $C'(x)$ сохраняет постоянный знак,

$$C'(x) \neq 0. \tag{94}$$

Смысл этого условия тот же, что и раньше: двигаясь по (92), мы проходим особые точки все новых и новых кривых семейства, не возвращаясь к прежним значениям C (черт. 25).

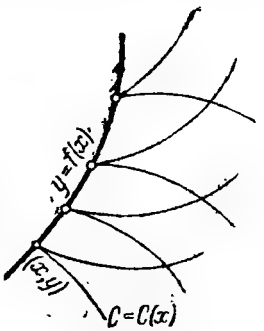
Мы сознательно повторяем здесь почти дословно изложение, касающееся огибающих отрезков, сохраняя и обозначения. Разумеется, теперешний вид функций $f(x)$ и $C(x)$ не имеет ничего общего с прежним.

Запишем, что через любую точку x, $y=f(x)$ отрезка (92) проходит кривая с параметром $C(x)$:

$$F[x, f(x), C(x)] = 0, \tag{95}$$

и что она имеет там особую точку:

$$F_x[x, f(x), C(x)] = F_y[x, f(x), C(x)] = 0. \tag{96}$$



Черт. 25.

Равенства (95) и (96), верные при любом x, представляют собой тождества. Дифференцируя (95) по x почленно, приходим снова к (89), а сравнивая с (96), снова получаем

$$F_C[x, f(x), C(x)] \cdot C'(x) = 0.$$

Наконец, используя (94), получим

$$F_C[x, f(x), C(x)] = 0. \tag{97}$$

Итак, *всякая точка отрезка особых точек* x, $y=f(x)$ *есть по определению особая точка кривой семейства с параметром* $C=C(x)$, *причем, как мы доказали, удовлетворяется условие* (97).

Хотя условие (97) имеет тот же вид, что и (82), но характеристической мы точку не назовем, так как это название мы условились применять лишь к обыкновенным точкам кривых семейства.

Теперь естественно рассмотреть вообще *геометрическое место таких точек* (x, y), *что для каждой из них можно указать значение* C, *удовлетворяющее сразу двум уравнениям*:

$$F(x, y, C) = 0, \quad F_C(x, y, C) = 0. \tag{98}$$

Это геометрическое место мы будем называть *дискриминантной кривой*.

Очевидно, что *все огибающие отрезки принадлежат дискриминантной кривой*; действительно, (88) и (91) показывают, что для всякой точки x, $y=f(x)$ огибающего отрезка можно подобрать C, удовлетворяющее условиям (98).

То же самое для отрезков особых точек показывают уравнения (95) и (97), так что *все отрезки особых точек тоже принадлежат дискриминантной кривой*.

Займемся теперь ближе самой дискриминантной кривой. Мы имеем в (98) два уравнения с тремя переменными. Они могут оказаться несовместными, — например, во всех случаях, когда уравнение семейства дано в виде, разрешенном относительно C:

$$F(x, y) = C. \tag{99}$$

Действительно, в этом случае

$$F(x, y, C) \equiv F(x, y) - C, \quad F_C(x, y, C) \equiv -1,$$

и второе из уравнений (98) невозможно. Отметим кстати, что в семействе (99) кривые при различных значениях C не могут, очевидно, иметь общих точек.

Уравнения (98) могут также определять лишь отдельные точки, — например, если все кривые семейства проходят через две данные точки, других же общих точек попарно не имеют. Таково семейство окружностей:

$$F(x, y, C) \equiv (x - C)^2 + y^2 - (a^2 + C^2) = 0,$$

проходящих через точки $(0, +a)$ и $(0, -a)$, a фиксировано. Здесь

$$F_C = -2(x - C) - 2C = -2x;$$

приравнивая нулю, получим $x = 0$. Вставляя в само уравнение, приходим к $y^2 - a^2 = 0$, т. е. $y = \pm a$. Дискриминантная кривая выродилась в две точки.

Нас будет интересовать наиболее общий случай, когда уравнения (98) определяют целую кривую. Назовем *отрезком дискриминантной кривой* такой простой отрезок

$$y = f(x), \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \tag{100}$$

вдоль которого так указаны значения C в зависимости от x,

$$C = C(x), \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \tag{101}$$

что уравнения (98) удовлетворяются тождественно:

$$F[x, f(x), C(x)] \equiv 0, \quad F_C[x, f(x), C(x)] \equiv 0. \tag{102}$$

Другими словами, отрезок дискриминантной кривой — это ее достаточно малый кусок, для которого уравнения (98) удается переписать в виде (100), (101), т. е. в виде, разрешенном относительно y и C.

Диференцируя по x первое из тождеств (102), получим

$$F_x + F_y f'(x) + F_C C'(x) \equiv 0,$$

а учитывая второе из тождеств (102), приходим к тождеству

$$F_x + F_y f'(x) \equiv 0. \tag{103}$$

Допустим сначала, что точка отрезка (100) x, $y = f(x)$ есть заведомо обыкновенная точка для кривой семейства с параметром $C = C(x)$

[как показывает первое из тождеств (102), такая кривая во всяком случае проходит через точку x, $y=f(x)$]. Тогда $F_y \neq 0$, так как в противном случае в силу (103) не только F_y, но и F_x обратилось бы в нуль.

Перепишем (103) в виде

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Это равенство показывает, что, с одной стороны, угловой коэфициент касательной к отрезку (100) в точке x, $y=f(x)$ и, с другой стороны, угловой коэфициент касательной в той же точке к кривой семейства с параметром $C=C(x)$ равны между собой. Следовательно, и сами касательные совпадают.

Итак, *отрезок дискриминантной кривой* (100) *в каждой своей точке* x, $y=f(x)$ *касается некоторой кривой семейства, параметр которой определяется уравнением* (101), *если только эта последняя кривая не имеет точку* x, $y=f(x)$ *своей особой точкой* [1]).

Следовательно, *отрезки дискриминантной кривой, свободные от особых точек кривых семейства, суть огибающие отрезки.*

Окончательно можно формулировать итог этого параграфа в виде следующего практического правила. Исследуя семейство кривых, мы прежде всего должны составить уравнения дискриминантной кривой:

$$F(x, y, C)=0, \quad F_C(x, y, C)=0. \tag{104}$$

Практически с этой парой уравнений придется обращаться по различному в зависимости от конкретного случая. Возможно, что удастся все три переменных x, y, C выразить в функции одного параметра; или же удастся выразить C через x, y из одного уравнения; тогда, подставляя в другое полученную функцию $C(x, y)$, получим уравнение дискриминантной кривой непосредственно в виде $\varphi(x, y)=0$.

Нужно выделить ту часть дискриминантной кривой, для которой x, y, C, кроме уравнений (104), удовлетворяют еще уравнениям

$$F_x(x, y, C)=F_y(x, y, C)=0. \tag{105}$$

Так как мы знаем, что дискриминантная кривая содержит все отрезки особых точек кривых семейства, а для этих точек условия (105) необходимо соблюдаются, то в выделенную часть наверное попадут все отрезки особых точек. Далее, нужно рассмотреть остальную часть дискриминантной кривой, которая будет заключать все огибающие отрезки и, обратно, каждый отрезок которой, как только что было доказано, будет огибающим отрезком. На этом основании эту остальную часть дискриминантной кривой мы будем называть *огибающей.*

Пример. Уравнение семейства

$$F(x, y, C)=(y-C)^2-(x-C)^3=0.$$

Составляем уравнение дискриминантной кривой, присоединяя уравнение

$$F_C=-2(y-C)+3(x-C)^2=0.$$

[1]) Или, по крайней мере, точкой, где $F_x=F_y=0$.

Преобразуем эту пару уравнений к более удобному виду. Из второго уравнения получаем

$$y - C = \frac{3}{2}(x - C)^2. \qquad (*)$$

Подставляя в первое, найдем

$$\frac{9}{4}(x - C)^4 - (x - C)^3 = 0$$

или

$$\frac{9}{4}(x - C)^3\left(x - C - \frac{4}{9}\right) = 0.$$

Здесь имеются две возможности:

1) $x - C = 0$; пользуясь равенством (*), запишем уравнение этой части дискриминантной кривой в виде, разрешенном относительно y и C:

$$y = x, \quad C = x.$$

2) $x - C - \frac{4}{9} = 0$; тогда из (*) $y - C = \frac{8}{27}$; снова запишем уравнения в разрешенном относительно y и C виде:

$$C = x - \frac{4}{9}, \quad y = x - \frac{4}{27}.$$

Мы получили две ветви дискриминантной кривой. Составим условия (105):

$$F_x = -3(x - C)^2 = 0, \quad F_y = 2(y - C) = 0.$$

Проверяя их, видим, что для первой ветви они удовлетворяются, так что первая ветвь содержит все отрезки особых точек. Что же касается второй ветви, то для нее проверка дает отрицательный результат, следовательно, вторая ветвь есть огибающая. Рекомендуется разобрать этот пример на чертеже.

§ 10. Асимптоты.

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос об асимптотах. Суть дела заключается в том, что иногда уходящая в бесконечность ветвь кривой имеет весьма простое устройство: она вытягивается вдоль некоторой прямой, неограниченно к ней приближаясь. Тогда, чтобы составить представление о форме кривой, бывает, естественно, очень важно уметь отыскивать такие прямые (асимптоты).

Дадим теперь точные определения. Пусть рассматривается ветвь какой-нибудь кривой, заданная параметрически:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_0 \leqslant t < T, \qquad (106)$$

причем при t, стремящемся к T, точка кривой $M(x, y)$ стремится в бесконечность, т. е. ее расстояние от начала бесконечно возрастает:

$$\sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2} \underset{t \to T}{\to} \infty. \qquad (107)$$

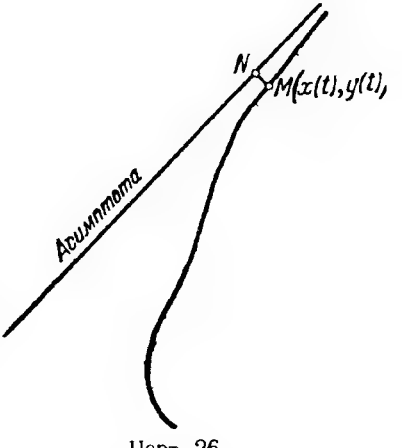
В частности, T может быть бесконечностью, т. е. область изменения t будет от t_0 до бесконечности.

Мы назовем ***асимптотой кривой*** (106) *такую прямую, что расстояние точки M на кривой от этой прямой стремится к нулю, когда точка M стремится по кривой в бесконечность.*

Другими словами,

$$MN \to 0 \quad \text{при} \quad t \to T, \tag{108}$$

где N—основание перпендикуляра, опущенного из M на прямую (черт. 26).



Черт. 26.

Разумеется, далеко не для всякой кривой (106) и при соблюдении условия (107) асимптота существует (возьмем, например, логарифмическую спираль, которая раскручивается, неограниченно удаляясь от начала и описывая около него неограниченное число оборотов).

Поставим следующую задачу. Пусть дана прямая

$$Ax + By + C = 0. \tag{109}$$

Каковы необходимые и достаточные условия того, что эта прямая есть асимптота кривой (106)?

Возьмем прежде всего какую-нибудь точку $M[x(t), y(t)]$ на нашей кривой и вычислим ее расстояние MN от прямой (109) (черт. 26). Как известно из аналитической геометрии, для этого нужно левую часть (109) умножить на нормирующий множитель $\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ и подставить вместо текущих координат координаты точки M. Искомое расстояние MN (которое нас интересует лишь по абсолютному значению) получится в виде

$$MN = \frac{|Ax(t) + By(t) + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

По самому определению, для того чтобы прямая (109) была асимптотой, необходимо и достаточно, чтобы это расстояние стремилось к нулю при $t \to T$; но так как знаменатель постоянный, то это требование равносильно следующему:

$$Ax(t) + By(t) + C \to 0 \quad \text{при} \quad t \to T. \tag{110}$$

Другими словами, левая часть уравнения прямой (109) при $t \to T$ стремится к нулю, если в нее подставить координаты точки M, стремящейся по кривой в бесконечность. Таков необходимый и достаточный признак того, что (109) есть асимптота.

Теперь нетрудно решить и такую задачу: *как связаны с данной кривой* (106) *коэфициенты уравнения ее асимптоты (если таковая существует)?*

Допустим, что асимптота существует и *не параллельна* оси Y. Тогда ее уравнение можно взять в виде

$$y - kx - b = 0,$$

где k и b — некоторые постоянные. Согласно признаку (110)

$$y(t) - kx(t) - b \to 0 \quad \text{при } t \to T. \tag{111}$$

Прежде всего замечаем, что при $t \to T$ обязательно $|x(t)| \to \infty$. Действительно, так как расстояние MN стремится к нулю, то при M, стремящейся в бесконечность, N также стремится в бесконечность уже по асимптоте, т. е. по прямой, не параллельной оси. А это возможно лишь при бесконечном возрастании $|x|$ для точки N, а следовательно, и для точки M.

Если разделить теперь на $x(t)$ левую часть (111), то это выражение и подавно будет стремиться к нулю. Получим

$$\frac{y(t)}{x(t)} - k - \frac{b}{x(t)} \to 0,$$

но так как b постоянное, то $\frac{b}{x(t)}$ стремится к нулю, и значит,

$$\frac{y(t)}{x(t)} - k \to 0 \quad \text{или} \quad \frac{y(t)}{x(t)} \to k. \tag{112}$$

Далее, (111) утверждает, что разность между переменным $y(t) - kx(t)$ и постоянным b стремится к нулю, или

$$y(t) - kx(t) \underset{t \to T}{\to} b. \tag{113}$$

Итак, *в случае существования асимптоты, не параллельной оси Y, ее угловой коэфициент k есть предел отношения $\frac{y(t)}{x(t)}$, а отрезок b, отсекаемый асимптотой на оси Y, есть предел выражения $y(t) - kx(t)$, в обоих случаях при $t \to T$, т. е. когда точка кривой $M[x(t), y(t)]$ уходит в бесконечность.* Отсюда сейчас же вытекает правило для практического отыскания асимптот (не параллельных оси Y) для заданной кривой (106).

Прежде всего исследуем отношение $\frac{y(t)}{x(t)}$ при $t \to T$. Если оно не имеет предела, то искомой асимптоты заведомо не существует. Если же это отношение имеет предел, то, обозначая его через k, исследуем выражение

$$y(t) - kx(t).$$

Если это выражение не имеет предела, то асимптоты не существует. Если же оно имеет предел (который обозначим через b), то асимптота существует, и ею будет служить прямая

$$y - kx - b = 0. \tag{114}$$

В самом деле, согласно последнему допущению

$$y(t) - kx(t) \underset{t \to T}{\to} b,$$

т. е. левая часть уравнения (114) стремится к нулю после подстановки $x = x(t)$, $y = y(t)$, при $t \to T$, а это согласно (110) доказывает, что (114) есть асимптота.

Мы оставили в стороне вопрос о том, как связано с данной кривой (106) уравнение асимптоты, если последняя *параллельна оси Y*. Но в этом случае уравнение асимптоты имеет вид

$$x - a = 0, \tag{115}$$

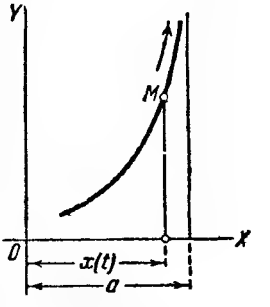
где a — постоянное. Согласно признаку (110)

$$x(t) - a \underset{t \to T}{\to} 0, \text{ или } x(t) \underset{t \to T}{\to} a. \tag{116}$$

Итак, a находится как *предел* $x(t)$ *при* $t \to T$.

Отсюда вытекает очевидное практическое правило для отыскания асимптот, параллельных оси Y (черт. 27). Нужно исследовать $x(t)$ при $t \to T$. Если предел $x(t)$ не существует, то такой асимптоты нет; если же он существует, то, обозначая этот предел через a, получаем асимптоту

$$x - a = 0.$$



Черт. 27.

При решении всех этих вопросов мы брали кривую в параметрическом задании (106). Если кривая дана уравнением $y = y(x)$, $x_0 \leqslant x < \infty$ [1]), то, присоединив сюда тождество $x = x$, мы вправе рассматривать эту пару равенств как частный случай (106), когда за параметр t принят x. Все выводы останутся верны. Угловой коэфициент k находится, как предел отношения $\frac{y(x)}{x}$ при $x \to \infty$, а свободный член b — как предел выражения $y(x) - kx$ при $x \to \infty$. Случай асимптоты, параллельной оси Y, здесь возможен лишь в случае разрыва непрерывности функции $y(x)$, точнее, если $y(x)$ стремится к бесконечности при стремлении x к некоторому значению a (см. черт. 27).

Во многих случаях к понятию асимптоты можно подойти с несколько иной точки зрения. А именно, имеет место такая теорема:

Если касательная к кривой (106) *стремится к предельному положению, когда точка касания стремится по кривой в бесконечность, то это предельное положение есть асимптота.* Все точки кривой (106) считаем заведомо обыкновенными, т. е. $x'(t)$, $y'(t)$ не обращаются в нуль одновременно.

---

[1]) Мы ограничиваемся, таким образом, случаем кривой, уходящей в бесконечность вправо. В случае $x_0 \geqslant x > -\infty$ все будет вполне аналогично.

В целях простоты выберем при доказательстве предельное положение касательной за ось X. Напишем уравнение (31) касательной в точке $x(t)$, $y(t)$, разрешенное относительно Y (через X, Y обозначаем текущие координаты):

$$Y = \frac{y'(t)}{x'(t)} X + \left[y(t) - \frac{y'(t)}{x'(t)} x(t) \right]. \tag{117}$$

Так как касательная при $t \to T$ стремится совпасть с осью X, то ее угловой коэфициент

$$k = \frac{y'(t)}{x'(t)} \tag{118}$$

и свободный член уравнения (117)

$$y(t) - \frac{y'(t)}{x'(t)} x(t) \tag{119}$$

стремятся к нулю. Следовательно, *начиная с некоторого значения* $t = t_1$, (118) остается ограниченным, и знаменатель в выражении (118) не может обращаться в нуль: $x'(t) \neq 0$. Пусть для определенности $x'(t) > 0$. Тогда функция $x(t)$ растет монотонно и, более того, при $t \to T$ стремится к бесконечности. В самом деле, если бы $x(t)$ оставалась ограниченной, то в бесконечно малой разности (119) вычитаемое стремилось бы к нулю, а следовательно, стремилось бы к нулю и $y(t)$. Но ограниченность $x(t)$ и стремление $y(t)$ к нулю противоречит тому, что точка $x(t)$, $y(t)$ стремится в бесконечность.

Установив, что $x(t) \to \infty$ при $t \to T$, мы легко выясним поведение $y(t)$. Для этой цели, разделив бесконечно малую величину (119) на бесконечно большую $x(t)$, получаем бесконечно малую $\frac{y(t)}{x(t)} - \frac{y'(t)}{x'(t)}$. Так как $\frac{y'}{x'} \to 0$, то $\frac{y}{x} \to 0$. Далее, представим $y(t)$ в виде дроби

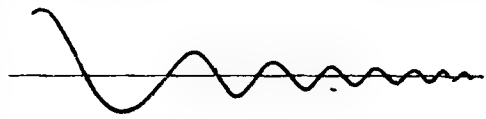
$$y(t) = \frac{\frac{y(t)}{x(t)}}{\frac{1}{x(t)}},$$

числитель и знаменатель которой при $t \to T$ стремятся к нулю, являясь диференцируемыми функциями. По правилу Лопиталя нужно исследовать отношение производных числителя и знаменателя, и если эта новая дробь при $t \to T$ стремится к пределу, то прежняя дробь стремится к тому же пределу. Вычислим отношение производных:

$$\frac{\left[\frac{y(t)}{x(t)}\right]'}{\left[\frac{1}{x(t)}\right]'} = \frac{y'(t)\,x(t) - x'(t)\,y(t)}{-x'(t)}.$$

Это выражение совпадает с (119) и, следовательно, стремится к нулю при $t \to T$. Исходная дробь, представляющая $y(t)$, тоже стремится к нулю, а значит, ось X (за которую принято предельное положение касательной) есть асимптота нашей кривой.

Теорема доказана. Заметим, что *обратная теорема неверна*, т. е. асимптота может и не быть предельным положением касательной, так как это предельное положение может не существовать. Например, кривая $y=\frac{1}{x}\sin x^2$, очевидно, имеет асимптотой ось X (при $x\to\infty$). Однако угловой коэфициент касательной к этой кривой $y'=2\cos x^2-\frac{1}{x^2}\sin x^2$ не стремится ни к какому пределу при $x\to\infty$, и предельного положения касательной не существует. Суть дела в этом примере в том, что кривая стремится к асимптоте, колеблясь около нее все более мелкими волнами, тем не менее с резкими колебаниями направления касательной (черт. 28).



Черт. 28.

Развитые сейчас методы относились к случаю параметрического задания кривой. Укажем коротко метод отыскания асимптоты для кривой вида $F(x, y)=0$ в частном случае алгебраической кривой. Левая часть представляет собой, следовательно, целый многочлен в переменных x, y. Перепишем уравнение в виде

$$F(x, y)=F_m(x, y)+F_{m-1}(x, y)+\ldots+F_0=0, \qquad (120)$$

где $F_m(x, y)$ означает сумму членов m-й (старшей) степени, $F_{m-1}(x, y)$ означает сумму членов $m-1$-й степени, ..., F_0 — свободный член.

Учитывая однородность относительно x, y каждой суммы F_m, F_{m-1}, ..., можно переписать (120) в виде

$$x^m F_m\left(1, \frac{y}{x}\right)+x^{m-1}F_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right)+\ldots+F_0=0,$$

или, деля на x^m обе части уравнения (точки оси Y, где $x=0$, мы не будем рассматривать), получим

$$F_m\left(1, \frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}F_{m-1}\left(1, \frac{y}{x}\right)+\ldots+\frac{1}{x^m}F_0=0.$$

Для удобства введем обозначения $\xi=\frac{1}{x}$, $\eta=\frac{y}{x}$; тогда уравнение перепишется в виде

$$\varphi(\xi, \eta)=F_m(1, \eta)+\xi F_{m-1}(1, \eta)+\ldots+\xi^m F_0=0. \qquad (121)$$

Рассмотрим эту зависимость вблизи значений $\xi=0$, $\eta=k$ [1]). Поскольку мы хотим, чтобы при этих значениях уравнение (121) удовлетворялось, то значение k придется взять равным одному из действительных корней уравнения

$$F_m(1, \eta)=0. \qquad (122)$$

[1]) Этим значениям ξ, η никакие x, y, понятно, не соответствуют, но когда $\xi\to 0$, то $x\to\infty$. Здесь и заключается выгода введения этих новых переменных.

Ограничимся случаем, когда k простой корень полинома $F_m(1, \eta_1)$. Вычислим частные производные от φ по ξ и η_1 и подставим значения $\xi = 0$, $\eta_1 = k$:

$$\varphi_\xi(0, k) = F_{m-1}(1, k), \quad \varphi_{\eta_1}(0, k) = F'_m(1, k).$$

Здесь штрих означает диференцирование по второму аргументу, причем производная отлична от 0, так как k — простой корень. По теореме существования неявной функции уравнение (121) вблизи значений $\xi = 0$, $\eta_1 = k$ разрешимо относительно η_1:

$$\eta_1 = \eta_1(\xi), \quad \text{где} \quad \eta_1(0) = k. \tag{123}$$

Производная функции $\eta_1(\xi)$ при $\xi = 0$, $\eta_1 = k$ равна по определению

$$\eta_1'(0) = \lim_{\xi \to 0} \frac{\eta_1(\xi) - k}{\xi},$$

а по правилу деференцирования неявной функции

$$\eta_1'(0) = -\frac{\varphi_\xi(0, k)}{\varphi_{\eta_1}(0, k)} = -\frac{F_{m-1}(1, k)}{F'_m(1, k)}.$$

Следовательно,

$$\frac{\eta_1(\xi) - k}{\xi} \underset{\xi \to 0}{\to} -\frac{F_{m-1}(1, k)}{F'_m(1, k)},$$

или, возвращаясь к x и y:

$$y - kx \to -\frac{F_{m-1}(1, k)}{F'_m(1, k)}.$$

Здесь под x и y подразумеваются текущие координаты той ветви кривой, для которой зависимость между ξ, η задана уравнением (123). Полученный результат показывает, что *прямая*

$$y - kx + \frac{F_{m-1}(1, k)}{F'_m(1, k)} = 0, \tag{124}$$

где k — простой действительный корень уравнения (122), *будет служить асимптотой для одной ветви кривой* (120) [именно, для ветви (123)].

Легко убедиться, что этим путем отыскиваются все асимптоты (не параллельные оси Y), если все корни полинома $F_m(1, \eta)$ простые. Если же этого ограничения не ставить, то остальные асимптоты, отвечающие кратным корням k, существуют лишь в исключительных случаях, только если $F_{m-1}(1, k)$ тоже равно нулю; они требуют более сложного исследования. Наконец, чтобы не упустить асимптот, параллельных оси Y, можно повторить исследование, поменяв ролями координаты x, y; тогда асимптоты, не параллельные оси X, будут определяться уравнением

$$x - ky + \frac{F_{m-1}(k, 1)}{F'_m(k, 1)} = 0, \tag{125}$$

причем здесь штрих означает дифференцирование по *первому* аргументу, а k есть корень уравнения

$$F_m(\xi, 1) = 0.$$

Уравнение (125) определяет асимптоту, параллельную оси Y, тогда и только тогда, если $k = 0$, т. е. если $F_m(\xi, 1)$ имеет нулевой корень. В этом случае (125) принимает вид

$$x + \frac{F_{m-1}(0, 1)}{F'_m(0, 1)} = 0.$$

Случай кратного нулевого корня мы оставляем в стороне.

ГЛАВА II.

ДИФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ И ЕГО ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕНЕНИЯ К ТЕОРИИ КРИВЫХ.

В этой главе мы должны ознакомиться с аппаратом, которым мы будем пользоваться во всем последующем изложении. Это — аппарат векторного анализа, точнее, векторного дифференциального исчисления. Основным его достоинством является соединение приемов дифференциального исчисления с геометричностью понятия вектора.

§ 11. Определение производной и техника дифференцирования.

Основным понятием у нас будет служить понятие вектор-функции скалярного (т. е. принимающего численные значения) переменного.

Мы скажем, что нам *дана вектор-функция* $\mathbf{a}(t)$, *если каждому значению действительного переменного* t *в некоторой области изменения* $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ *отвечает вполне определенное значение вектора* $\mathbf{a}$.

Под *вектором* здесь и в дальнейшем мы понимаем свободный (т. е. отложенный из какой угодно точки) вектор в пространстве; если речь идет о векторе, отложенном из данной точки, то это будет оговариваться особо.

Как и в случае обыкновенных функций, мы будем рассматривать в дальнейшем функции лишь непрерывные и дифференцируемые. Однако в применении к вектор-функциям эти понятия нуждаются в определении.

Определим прежде всего понятие предела для векторной переменной. Пусть аргумент t стремится к пределу t_0; мы скажем, что *значение вектор-функции* $\mathbf{a}(t)$ *стремится при этом к пределу* $\mathbf{a}_0$ (где $\mathbf{a}_0$ — некоторый постоянный вектор), *если разность векторов*

$$\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0$$

стремится к нулю по модулю.

Итак, когда мы пишем

$$\mathbf{a}(t) \underset{t \to t_0}{\to} \mathbf{a}_0,$$

то подразумеваем, что

$$|\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0| \underset{t \to t_0}{\to} 0. \tag{126}$$

Под модулем $|\mathbf{a}|$ какого-нибудь вектора $\mathbf{a}$ мы понимаем длину отрезка, изображающего вектор, т. е. положительное число (или 0, если сам вектор $\mathbf{a} = 0$). Поэтому наше определение векторного предела сводится к понятию о стремлении к нулю действительной переменной — понятию, известному из анализа.

Следствие. *Если* $\mathbf{a}(t) \to \mathbf{a}_0$, *то модуль* $\mathbf{a}(t)$ *стремится к модулю* $\mathbf{a}_0$.

Действительно, *разность* модулей $|\mathbf{a}(t)| - |\mathbf{a}_0|$ двух векторов, взятая по модулю, всегда не превышает модуль разности $|\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0|$ и в силу (126) должна в нашем случае стремиться к нулю. А это и значит, что $|\mathbf{a}(t)| \to |\mathbf{a}_0|$.

В частности, $\mathbf{a}(t) \to 0$ равносильно с

$$|\mathbf{a}(t)| \to 0.$$

Дадим теперь определение непрерывности вектор-функции в точке $t = t_0$. А именно, *если при* t, *стремящемся любым способом к* t_0, $\mathbf{a}(t)$ *стремится к пределу* $\mathbf{a}(t_0)$, *то функция* $\mathbf{a}(t)$ *называется непрерывной при* $t = t_0$.

Определение непрерывности, пользуясь определением предела, можно записать формулой

$$|\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}(t_0)| \underset{t \to t_0}{\to} 0. \tag{126'}$$

Теперь дадим определение дифференцируемости, также вполне аналогичное обычному.

Разделим приращение вектор-функции на приращение аргумента $t - t_0$ (деление вектора на число):

$$\frac{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}(t_0)}{t - t_0}, \tag{127}$$

и изучим полученный вектор при t, стремящемся к t_0. *Если при* t, *стремящемся к* t_0 (*любым способом*), *вектор* (127) *стремится к некоторому* (*одному и тому же*) *предельному вектору, то функция* $\mathbf{a}(t)$ *называется дифференцируемой в точке* t_0, *и предельный вектор называется ее производной в этой точке.*

Этот вектор — производную в точке t_0 — мы будем обозначать через $\mathbf{a}'(t_0)$. Определение производной, вспоминая определение предела, можно, очевидно, записать формулой

$$\left| \frac{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}(t_0)}{t - t_0} - \mathbf{a}'(t_0) \right| \underset{t \to t_0}{\to} 0. \tag{128}$$

Если производная существует при каждом значении t, то $\mathbf{a}'(t)$ снова представляет вектор-функцию от t. Если функция $\mathbf{a}'(t)$ в свою очередь непрерывна и дифференцируема, то ее производная $\mathbf{a}''(t)$ называется второй производной, и т. д.

В дальнейшем нам придется рассматривать вектор-функции не от одного, а от двух скалярных аргументов. В этом случае мы совершенно аналогично рассматриваем частные производные. Частная производная здесь, как и в обычном анализе, определяется, как производная по одному аргументу при закрепленном значении другого.

Нам нужно теперь установить правила дифференцирования функций, получающихся из данных вектор-функций путем векторных операций. Но еще раньше для них нужно установить правила перехода к пределу.

Пусть $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{b}(t)$, ... будут векторные функции, а $m(t)$, ... — скалярные функции одного и того же аргумента t, причем известно, что при $t \to t_0$ значения этих функций стремятся к пределам:

$$\mathbf{a}(t) \to \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{b}(t) \to \mathbf{b}_0, \ \ldots, \quad m(t) \to m_0, \ \ldots,$$

или, что то же самое,

$$|\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0| \to 0, \quad |\mathbf{b}(t) - \mathbf{b}_0| \to 0, \ \ldots, \ |m(t) - m_0| \to 0, \ \ldots \quad (129)$$

Мы утверждаем, что тогда при $t \to t_0$:

1. *Предел суммы двух вектор-функций существует и равен сумме пределов*:

$$\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t) \to \mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0. \quad (130)$$

Для доказательства нужно составить модуль разности:

$$|\{\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)\} - \{\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0\}| = \\ = |\{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0\} + \{\mathbf{b}(t) - \mathbf{b}_0\}| \leqslant |\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0| + |\mathbf{b}(t) - \mathbf{b}_0|.$$

Неравенство, написанное нами, основано на том, что модуль суммы векторов не превышает сумму их модулей. В последней сумме каждое слагаемое стремится к нулю согласно (129), следовательно, и подавно (напомним, что речь идет о положительных величинах)

$$|\{\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)\} - (\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0)| \to 0,$$

чем (130) доказано.

2. *Предел произведения* $m(t)\,\mathbf{a}(t)$ (*скалярной величины на вектор*) *существует и равен* $m_0\mathbf{a}_0$:

$$m(t)\,\mathbf{a}(t) \to m_0\mathbf{a}_0. \quad (131)$$

Составим разность векторов

$$m(t)\,\mathbf{a}(t) - m_0\mathbf{a}_0 = m(t)\,\{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0\} + \{m(t) - m_0\}\,\mathbf{a}_0; \quad (131')$$

отсюда

$$|m(t)\,\mathbf{a}(t) - m_0\mathbf{a}_0| \leqslant |m(t)|\,|\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0| + |m(t) - m_0|\,|\mathbf{a}_0|.$$

Теперь всюду стоят скалярные (положительные) величины. В правой части в первом члене первый множитель стремится к $|m(t_0)|$, второй же — к нулю [согласно (129)]; во втором члене первый множитель

стремится к нулю, второй постоянный; в результате правая часть стремится к нулю, а левая и подавно. Тем самым (131) доказано.

3. *Предел скалярного произведения* $\mathbf{a}(t)\,\mathbf{b}(t)$ *существует и равен* $\mathbf{a}_0\mathbf{b}_0$:

$$\mathbf{a}(t)\,\mathbf{b}(t) \to \mathbf{a}_0\mathbf{b}_0. \tag{132}$$

Составим разность (здесь речь идет о скалярных величинах)

$$\mathbf{a}(t)\,\mathbf{b}(t) - \mathbf{a}_0\mathbf{b}_0 = \{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0\}\,\mathbf{b}(t) + \{\mathbf{b}(t) - \mathbf{b}_0\}\,\mathbf{a}_0. \tag{132'}$$

В справедливости этого тождества легко убедиться по свойствам скалярного произведения. Далее,

$$|\mathbf{a}(t)\,\mathbf{b}(t) - \mathbf{a}_0\mathbf{b}_0| \leqslant |\{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0\}\,\mathbf{b}(t)| + |\{\mathbf{b}(t) - \mathbf{b}_0\}\,\mathbf{a}_0|, \tag{132''}$$

так как модуль суммы не превосходит суммы модулей. Теперь заметим, что так как скалярное произведение $\mathbf{pq}$ каких-нибудь векторов $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ равно по определению $|\mathbf{p}|\,|\mathbf{q}|\cos(\widehat{\mathbf{pq}})$, то

$$|\mathbf{pq}| \leqslant |\mathbf{p}|\,|\mathbf{q}|.$$

Следовательно, если один множитель $\mathbf{p}$ стремится к нулю (что равносильно $|\mathbf{p}| \to 0$), а другой множитель $\mathbf{q}$ стремится к определенному пределу $\mathbf{q}_0$ (что влечет за собой $|\mathbf{q}| \to |\mathbf{q}_0|$), то правая часть неравенства стремится к нулю, а следовательно, и подавно

$$|\mathbf{pq}| \to 0.$$

Теперь ясно, что в правой части неравенства (132″) первое слагаемое

$$|\{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0\}\,\mathbf{b}(t)| \underset{t \to t_0}{\to} 0,$$

так как $|\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0| \to 0$, а $|\mathbf{b}(t)| \to |\mathbf{b}_0|$. То же относится и ко второму слагаемому. Левая часть (132″) и подавно стремится к нулю, и (132) этим доказано.

4. *Предел векторного произведения* $[\mathbf{a}(t),\ \mathbf{b}(t)]$ *существует и равен* $[\mathbf{a}_0,\ \mathbf{b}_0]$:

$$[\mathbf{a}(t),\ \mathbf{b}(t)] \to [\mathbf{a}_0,\ \mathbf{b}_0]. \tag{133}$$

Составим разность (речь идет снова о векторах):

$$[\mathbf{a}(t),\ \mathbf{b}(t)] - [\mathbf{a}_0,\ \mathbf{b}_0] = [\{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0\},\ \mathbf{b}(t)] + [\mathbf{a}_0,\ \{\mathbf{b}(t) - \mathbf{b}_0\}]. \tag{133'}$$

В справедливости этого тождества легко убедиться по свойствам векторного произведения (раскрывая скобки). Отсюда

$$|[\mathbf{a}(t),\ \mathbf{b}(t)] - [\mathbf{a}_0,\ \mathbf{b}_0]| \leqslant |[\{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0\},\ \mathbf{b}(t)]| + |[\mathbf{a}_0,\ \{\mathbf{b}(t) - \mathbf{b}_0\}]|, \tag{133''}$$

так как модуль суммы векторов не превосходит суммы их модулей. Теперь заметим, что модуль векторного произведения $[\mathbf{p},\ \mathbf{q}]$ каких-нибудь двух векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ равен по определению $|\mathbf{p}|\,|\mathbf{q}|\,|\sin\widehat{\mathbf{pq}}|$ и, следовательно,

$$|[\mathbf{p},\ \mathbf{q}]| \leqslant |\mathbf{p}|\,|\mathbf{q}|.$$

Поэтому, если $|\mathbf{p}| \to 0$, а $|\mathbf{q}|$ стремится к определенному пределу, то $|[\mathbf{p}, \mathbf{q}]| \to 0$. Применяя эти соображения к правой части (133″), убеждаемся, что она стремится к нулю, левая часть и подавно, и (133) доказано.

Переходим к *технике дифференцирования*. Пусть $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{b}(t)$, ... — вектор-функции, а $m(t)$, ... — скалярные функции, те и другие одного и того же аргумента t, *непрерывные и дифференцируемые при* $t = t_0$. Их значения при $t = t_0$ обозначим через $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$, ...; m_0, ...

Мы утверждаем, что в этом случае будут дифференцируемы при том же значении $t = t_0$ и следующие функции:

1. Вектор-функция $\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)$, причем

$$\{\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)\}' = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{b}'(t). \tag{134}$$

В самом деле, приращение этой функции при переходе от t_0 к t будет

$$\{\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)\} - (\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0).$$

После деления на $t - t_0$ оно примет вид

$$\frac{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0}{t - t_0} + \frac{\mathbf{b}(t) - \mathbf{b}_0}{t - t_0}.$$

При $t \to t_0$ оба слагаемые стремятся к пределам, соответственно к $\mathbf{a}'(t)$ и $\mathbf{b}'(t)$, следовательно, их сумма [согласно правилу (130)] стремится к пределу, а именно к $\mathbf{a}'(t) + \mathbf{b}'(t)$. Тем самым доказана дифференцируемость функции $\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)$ и формула (134) при значении $t = t_0$.

2. Вектор-функция $m(t)\,\mathbf{a}(t)$, причем

$$\{m(t)\,\mathbf{a}(t)\}' = m'(t)\,\mathbf{a}(t) + m(t)\,\mathbf{a}'(t). \tag{135}$$

Приращение вектор-функции $m(t)\,\mathbf{a}(t)$ при переходе от t_0 к t мы возьмем в виде (131′) и разделим на $t - t_0$.

Получим

$$m(t)\frac{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0}{t - t_0} + \frac{m(t) - m_0}{t - t_0}\mathbf{a}_0.$$

Заставим t стремиться к t_0; тогда в первом члене множитель $m(t)$ стремится к m_0, векторный множитель — к $\mathbf{a}'(t_0)$, следовательно, произведение по правилу (131) стремится к произведению пределов, т. е. к $m_0\mathbf{a}'(t_0)$. Во втором члене первый множитель стремится к $m'(t_0)$, второй — постоянный вектор, предел существует и равен $m'(t_0)\,\mathbf{a}_0$. Поскольку существуют пределы слагаемых, то существует и предел суммы, равный сумме пределов [правило (130)]:

$$m_0\mathbf{a}'(t_0) + m'(t_0)\,\mathbf{a}_0.$$

Итак, показано, что к такому пределу стремится при $t \to t_0$ приращение вектор-функции $m(t)\,\mathbf{a}(t)$, деленное на приращение аргумента t. Этим доказана дифференцируемость функции и справедливость формулы (135) при $t = t_0$.

3. Скалярная функция $\mathbf{a}(t)\,\mathbf{b}(t)$, причем

$$\{\mathbf{a}(t)\,\mathbf{b}(t)\}' = \mathbf{a}'(t)\,\mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t)\,\mathbf{b}'(t). \tag{136}$$

Берем приращение этой функции при переходе от t_0 к t в виде (132′) и делим на $t - t_0$. Получим

$$\frac{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0}{t - t_0}\,\mathbf{b}(t) + \mathbf{a}_0\,\frac{\mathbf{b}(t) - \mathbf{b}_0}{t - t_0}.$$

Мы имеем здесь сумму двух скалярных произведений, причем при $t \to t_0$ множители в первом произведении стремятся соответственно к $\mathbf{a}'(t_0)$ и $\mathbf{b}_0$, а во втором к $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{b}'(t_0)$.

Согласно правилу (132) при этом скалярные произведения также стремятся к пределам, именно к скалярным произведениям пределов. Поэтому предел написанного выражения существует и равен

$$\mathbf{a}'(t_0)\,\mathbf{b}_0 + \mathbf{a}_0\mathbf{b}'(t_0).$$

Таков предел отношения приращения функции $\mathbf{a}(t)\,\mathbf{b}(t)$ к приращению аргумента при $t \to t_0$. Этим доказана дифференцируемость функции и справедливость формулы (136) при $t = t_0$.

4. Вектор-функция $[\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)]$, причем

$$\left.\begin{aligned}[\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)]' = [\mathbf{a}'(t), \mathbf{b}(t)] + \\ + [\mathbf{a}(t), \mathbf{b}'(t)].\end{aligned}\right\} \tag{137}$$

Берем приращение этой вектор-функции (при переходе от t_0 к t) в форме (133′) и делим его на $t - t_0$. Получим

$$\left[\frac{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0}{t - t_0}, \mathbf{b}(t)\right] + \left[\mathbf{a}_0, \frac{\mathbf{b}(t) - \mathbf{b}_0}{t - t_0}\right].$$

Мы имеем здесь сумму векторных произведений. В первом из них множители, при $t \to t_0$, стремятся соответственно к пределам $\mathbf{a}'(t_0)$ и $\mathbf{b}_0$, во втором — к $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{b}'(t_0)$. Так как по правилу (133) векторные произведения стремятся к векторным произведениям пределов, то предел написанного выражения существует и равен

$$[\mathbf{a}'(t_0), \mathbf{b}_0] + [\mathbf{a}_0, \mathbf{b}'(t_0)].$$

Этим доказана дифференцируемость функции $[\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)]$ и справедливость формулы (137) при $t = t_0$.

Нужно обратить внимание на порядок множителей в формуле (137): если множитель $\mathbf{a}$ стоит на первом месте слева, то $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$ стоят на первом месте и в членах правой части. В случае векторного произведения это имеет значение.

Как мы видим, формулы дифференцирования и способы их вывода с формальной стороны почти дословно повторяют обыкновенное дифференциальное исчисление. В частности, для всех трех родов произведений повторяется в сущности одна и та же формула. Отметим, что если один из множителей постоянный, то, как и обычно, его производная равна нулю, и один из членов правой части исчезает.

Получается правило вынесения постоянного множителя из-под знака диференцирования.

Хотя здесь мы получили мало интересного по существу, зато у нас обоснован теперь ряд вычислительных правил, которыми мы будем широко пользоваться в дальнейшем. Мы ставим своей ближайшей задачей истолковать геометрически понятия вектор-функции и ее производной. Мы увидим, как эти понятия, введенные нами пока совершенно абстрактно и потому несколько сухо и невыразительно, приобретут отчетливый геометрический смысл и лягут в основу исследования сначала кривых, а затем и поверхностей в пространстве.

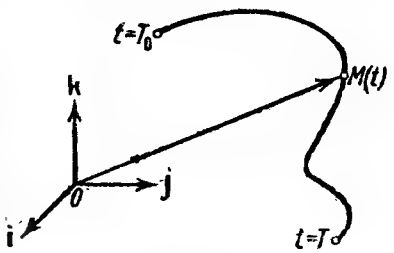
В дальнейшем мы будем рассматривать лишь вектор-функции, имеющие при всех значениях аргумента непрерывные производные до того порядка, до какого в данном построении они нам требуются.

§ 12. Истолкование вектор-функции как радиуса-вектора кривой в параметрическом представлении.

Пусть нам задана некоторая вектор-функция одного аргумента t в определенной области изменения последнего:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad T_0 \leqslant t \leqslant T. \tag{138}$$

Фиксируем в пространстве некоторую точку O и будем при всех значениях t откладывать вектор $\mathbf{r}(t)$ именно из этой точки. При каждом значении t мы получаем определенный вектор, $\overline{OM} = \mathbf{r}(t)$, начало которого в точке O, а конец M зависит от выбора значения t. При t, меняющемся в своей области изменения (от T_0 до T), мы получаем геометрическое место точек $M(t)$, которое мы будем называть *пространственной кривой, заданной в параметрическом представлении* (черт. 29).



Черт. 29.

Нам нужно теперь установить связь с координатным заданием кривой.

Примем фиксированную нами точку O за начало прямоугольных декартовых координат в пространстве и обозначим через $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ единичные векторы, отложенные по положительным направлениям координатных осей. Тогда, как известно, любой вектор, в частности $\mathbf{r}(t)$, можно разложить по $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, т. е. представить в виде их линейной комбинации с численными коэфициентами. Эти численные коэфициенты называются *координатами* вектора и, если отложить вектор из начала O, совпадают с прямоугольными декартовыми координатами конца этого вектора. Итак,

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}. \tag{139}$$

Координаты вектора $\mathbf{r}(t)$ обозначены нами через $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ в знак того, что их значения зависят от выбора значения t, поскольку от этого выбора зависит значение самого вектора $\mathbf{r}(t)$; но так как

вектор $\mathbf{r}(t)$ отложен из начала O, то его координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ совпадают с координатами его конца, точки $M(t)$. Итак, для точки $M(t)$ мы имеем

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad T_0 \leqslant t \leqslant T. \tag{140}$$

Текущие координаты точки $M(t)$ заданы здесь как функции параметра t, и мы с одинаковым правом можем считать, что исследуемая кривая описана концом вектора (138) или точкой с координатами (140), когда t пробегает область своего изменения от T_0 до T.

Умножая обе части равенства (139) на $\mathbf{i}$ скалярно, мы получим в правой части $x(t)$, так как $\mathbf{ij} = \mathbf{ik} = 0$, $\mathbf{i}^2 = 1$. Аналогично получим $y(t)$ и $z(t)$. Итак,

$$x(t) = \mathbf{r}(t)\,\mathbf{i}, \quad y(t) = \mathbf{r}(t)\,\mathbf{j}, \quad z(t) = \mathbf{r}(t)\,\mathbf{k}. \tag{141}$$

Заметим, что, поскольку мы предположили $\mathbf{r}(t)$ непрерывной и дифференцируемой, а векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, как постоянные, заведомо можно считать непрерывными и дифференцируемыми функциями t, то и выписанные скалярные произведения, т. е. функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ обладают, по доказанному, теми же свойствами.

Мы проделали путь от уравнения (138) к уравнениям (140). Существенно подчеркнуть, что всегда возможен и законен *обратный путь*. Действительно, пусть нам заданы уравнения (140), где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ совершенно произвольные (но, конечно, непрерывные и дифференцируемые) функции; уравнения (140) определяют геометрическое место точек $M(t)$ с координатами $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Построим теперь вектор-функцию

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}.$$

Тогда, если этот вектор откладывать из начала O, то конец его попадет в точку $M(t)$ и при изменении t опишет то же самое геометрическое место. Мы возвращаемся к заданию кривой вектор-функцией $\mathbf{r}(t)$, причем $\mathbf{r}(t)$ будет непрерывна и дифференцируема в силу правил, установленных в § 11.

Итак, *задание вектор-функции* (138) *в указанном геометрическом истолковании вполне равносильно заданию кривой системой уравнений* (140).

Установив связь с координатами, займемся геометрической стороной дела. Назовем *простым отрезком* пространственной кривой геометрическое место точек, которое в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задано уравнениями

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x), \\ z &= g(x). \end{aligned}\right\} \tag{141'}$$

Здесь x меняется в определенном промежутке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Так как f и g, как всегда предполагается у нас, однозначные и непрерывные фуикции, то наглядно можно представлять дело так, что простой отрезок пространственной кривой A_1A_2 получен из прямолинейного

отрезка $[x_1, x_2]$ путем смещения каждой точки $(x, 0, 0)$ этого отрезка по перпендикулярной к нему плоскости в положение $A[x, f(x), g(x)]$ (черт. 30).

Теперь уясним себе устройство в малых кусках кривой (138), или, что то же самое, (140). Будем называть точку $t = t_0$ на кривой обыкновенной, если при значениях t, достаточно близких к t_0, кривая представляет собой простой отрезок. Этим, собственно говоря, не устраняется возможность того, что при некотором удаленном от t_0 значении t кривая вернется в ту же точку и получится точка самопересечения (особая). Но на это мы не будем обращать внимания, так как будем интересоваться кривой лишь при значениях t, достаточно близких к его значению в рассматриваемой точке.

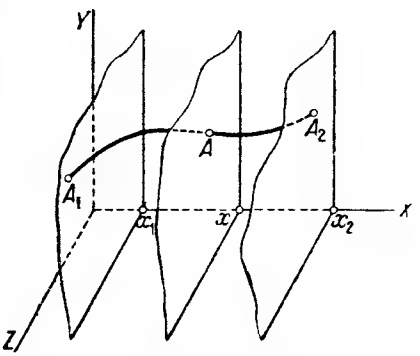
Формулируем теперь признак, при соблюдении которого точка будет заведомо обыкновенной: *если в данной точке* $t = t_0$ *производные*

$$x'(t_0), \quad y'(t_0), \quad z'(t_0)$$

не обращаются в нуль все одновременно (т. е. хоть одна $\neq 0$*), то точка* $t = t_0$ *обыкновенная.*

Пусть, для определенности, $x'(t_0) \neq 0$. Будем рассматривать первое из уравнений (140)

$$x - x(t) = 0,$$



Черт. 30.

как связывающее переменное x (составляющее первый член) с переменным t [входящим через свою функцию $x(t)$ во втором члене]. Это уравнение, очевидно, удовлетворяется при $t = t_0$, $x = x(t_0)$, т. е. в данной точке на кривой. Кроме того, частная производная по t от его левой части, т. е. $-x'(t)$, отлична от нуля при $t = t_0$.

По теореме существования неявной функции наше уравнение вблизи значений $t = t_0$, $x = x(t_0)$ однозначно разрешимо относительно t и может быть переписано, следовательно, в виде $t = t(x)$.

Вставляя полученное выражение t через x в остальные два из уравнений (140), мы получим y и z однозначно выраженными функциями x. Мы пришли к уравнениям вида (141′), т. е. получили при значениях t, близких к t_0, кривую в виде простого отрезка. Точка t_0 действительно обыкновенная.

Доказанный признак можно теперь формулировать более геометрично. Продифференцируем по t почленно уравнение (139), пользуясь установленными в § 11 правилами ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — постоянные). Получим

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}.$$

Если в данной точке функции x', y', z' обращаются в нуль одновременно, то $\mathbf{r}'$, очевидно, тоже равно нулю; обратно, если $\mathbf{r}' = 0$, то равны нулю и все его координаты x', y', z'. Поэтому признак обыкно-

венной точки, который состоит как раз в отрицании такого положения вещей в данной точке, может быть переформулирован так: *если в данной точке* $\mathbf{r}'(t) \neq 0$, *то точка заведомо обыкновенная*.

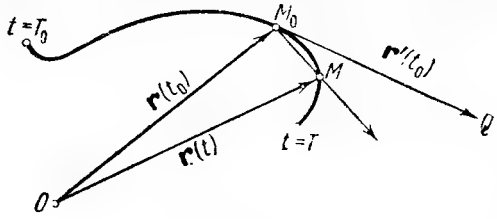
В дальнейшем при рассмотрении пространственных и плоских кривых мы будем подразумевать, что все их точки заведомо обыкновенные, т. е. что $\mathbf{r}'(t)$ все время не равна нулю, если только не оговорено противное.

§ 13. Геометрический смысл дифференцирования вектор-функции.

Истолковав вектор-функцию (138) как радиус-вектор некоторой кривой в параметрическом представлении, можно весьма наглядно изобразить весь процесс дифференцирования этой функции. Мы исходим из некоторого значения $t = t_0$; ему отвечает значение функции $\mathbf{r}(t_0)$, которое, будучи отложено из начала O, концом указывает некоторую точку M_0 на исследуемой кривой:

$$\mathbf{r}(t_0) = \overline{OM_0}$$

(черт. 31).



Черт. 31.

Переходим к некоторому другому значению t, которому таким же образом отвечает значение $\mathbf{r}(t)$ и точка M:

$$\mathbf{r}(t) = \overline{OM}.$$

Составим разность этих двух значений вектор-функции:

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \overline{OM} - \overline{OM_0} = \overline{M_0M}, \tag{142}$$

т. е. приращение вектор-функции есть вектор-хорда на кривой, соединяющий исходную точку M_0 с новой точкой M. Разделим приращение $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$ на приращение аргумента $t - t_0$ и рассмотрим частное

$$\frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0}. \tag{143}$$

Так как производилось деление вектора на число, получается вновь вектор, направленный по той же прямой, что и числитель $\overline{M_0M}$, притом в ту же сторону, если знаменатель $t - t_0 > 0$, и в обратную, если $t - t_0 < 0$. Так или иначе, частное (143) направлено по секущей $\overline{M_0M}$. Заставим теперь t стремиться к t_0. Тогда, в силу предполагаемой непрерывности функции $\mathbf{r}(t)$, значение $\mathbf{r}(t)$ стремится к $\mathbf{r}(t_0)$ как к пределу, другими словами,

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)| \underset{t \to t_0}{\to} 0.$$

Записанная этим условием непрерывность функции $\mathbf{r}(t)$ в точке $t = t_0$ теперь легко истолковывается геометрически: она означает согласно

(142), что длина хорды M_0M стремится к нулю при $t \to t_0$. Другими словами, когда значение параметра t стремится к t_0, отвечающая t точка M на кривой стремится в точку M_0, отвечающую t_0. Непрерывность вектор-функции истолковывается, таким образом, как непрерывность кривой.

В частном (143) числитель и знаменатель оба стремятся к нулю при t, стремящемся к t_0. Сам же вектор (143) в силу предполагаемой диференцируемости вектор-функции должен при этом стремиться к определенному вектору-пределу, который мы назвали (§ 11) производной вектора $\mathbf{r}(t)$. Итак,

$$\frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} \underset{t \to t_0}{\to} \mathbf{r}'(t_0), \tag{144}$$

где $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$ по предположениям, сделанным в конце § 12.

Когда t стремится к t_0, а точка M стремится по кривой в точку M_0, секущая M_0M, вращаясь в пространстве около точки M_0, остается в каждый момент направленной по вектору (143); и поскольку последний стремится к предельному вектору $\mathbf{r}'(t_0)$, то секущая также стремится к предельному положению, а именно к прямой M_0Q, направленной по вектору $\mathbf{r}'(t_0)$.

Предельное положение M_0Q для секущей мы будем, как обычно, называть *касательной* к кривой в точке M_0.

Итак, *производная* $\mathbf{r}'(t)$ *от вектор-функции* (138) *направлена по касательной в точке* t_0 *к кривой, которую* (138) *в нашем геометрическом истолковании определяет.*

Таким образом направление производной $\mathbf{r}'(t)$, в смысле прямой, которой этот вектор параллелен, получило вполне ясное геометрическое истолкование. Модуль же $\mathbf{r}'(t)$ такого истолкования не получил, и это не случайно. Вопрос этот связан со следующим важным обстоятельством, которое в усложненном виде встречается потом и в теории поверхностей и в теории многомерных пространств. А именно, нужно выяснить, какую роль играет параметр t для кривой, заданной посредством (138). Мы знаем, что значениям t в промежутке $T_0 \leqslant t \leqslant T$ однозначно (и, если устранить из рассмотрения точки самопересечения, взаимно однозначно) отвечают точки кривой. Таким образом параметр t в указанных пределах играет роль *координатной системы на кривой*; он нужен для того, чтобы своими значениями взаимно однозначно отмечать точки кривой. Но так как геометрически он ничем не был связан с кривой, то вполне возможно, сохраняя ту же кривую, ввести на ней другую *параметризацию*. Для этого достаточно ввести новое переменное τ, связанное с t функциональной зависимостью

$$t = t(\tau), \quad \tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1. \tag{145}$$

Мы будем предполагать при этом, что производная $t'(\tau)$ все время положительна, так что $t(\tau)$ — функция монотонно возрастающая, и что когда τ пробегает свою область изменения от τ_0 до τ_1, t растет от

T_0 до T. В этих предположениях функция $t(\tau)$ допускает обращение, т. е. можно записать:

$$\tau = \tau(t), \quad T_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{145'}$$

и значения t от T_0 до T находятся во взаимно однозначном соответствии со значениями τ от τ_0 до τ_1. Отсюда ясно, что те и другие одинаково годятся, чтобы отмечать точки исследуемой кривой, и выбор параметризации на кривой зависит от нашего произвола. Запишем параметрическое представление кривой в новой параметризации; для этого достаточно в (138) вставить выражение t через τ. Получим

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\{t(\tau)\}. \tag{146}$$

Очевидно, вид функциональной зависимости $\mathbf{r}$ от τ уже не тот, что от t, тем не менее кривая осталась прежней, так как при τ, пробегающем значения от τ_0 до τ_1, t попрежнему пробегает значения от T_0 до T и радиус-вектор $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(t)$ описывает своим концом M прежнюю кривую.

Итак, *на неизменной кривой, заданной вектор-функцией* (138), *можно произвольно менять параметризацию, отчего меняется вид функциональной зависимости* (138).

В том обстоятельстве, что параметризация кривой строится по произволу и не имеет в общем случае геометрического смысла, лежит причина того, что модуль производной вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ по параметру не находит геометрического истолкования. Действительно, дифференцируя (146) по новому параметру τ как функцию от функции, получим $\mathbf{r}'(t)t'(\tau)$. Мы видим, что производная радиуса-вектора той же самой кривой, но по новому параметру, отличается от производной по старому параметру $\mathbf{r}'(t)$ скалярным множителем $t'(\tau) > 0$. Это означает, что направление производной осталось прежним — и оно действительно не зависит от выбора параметра, так как всегда идет по касательной, — а модуль производной изменился и, следовательно, он зависит от произвола в выборе параметра и по отношению к самой кривой является величиной случайной. Мы ограничились для простоты заменой параметра (145) при условии $t'(\tau) > 0$. Можно взять, конечно, и случай $t'(\tau) < 0$, т. е. когда переменные t и τ изменяются в обратных направлениях. Тогда производная $\mathbf{r}'$ при переходе к новому параметру меняет свое направление на обратное.

Интересно сопоставить со всем этим, что в кинематике уравнение (138) выражает закон движения некоторой точки, указывая ее радиус-вектор для каждого момента времени t. Таким образом параметру t придается физический смысл времени, и тогда его уже нельзя заменять по произволу. В этом случае и производная $\mathbf{r}'(t)$ имеет физический смысл не только по направлению, но и по модулю, выражая вектор мгновенной скорости по величине и направлению.

Чтобы закончить геометрическое истолкование дифференцирования, рассмотрим еще *понятие о дифференциале вектор-функции*.

Вернемся к соотношению (144), где записана дифференцируемость вектор-функции $\mathbf{r}(t)$. По самому определению предела, соотноше-

ние (144) утверждает, что вектор

$$\alpha = \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} - \mathbf{r}'(t_0) \tag{147}$$

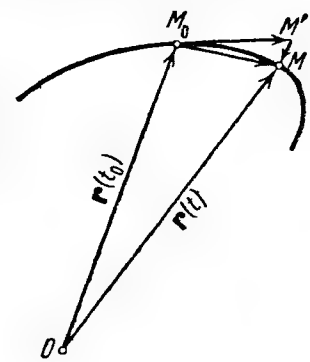
стремится (по модулю) к нулю при t, стремящемся к t_0:

$$\alpha \underset{t \to t_0}{\to} 0. \tag{147'}$$

Перепишем (147), умножив обе его части на $t - t_0$. Получим

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0)(t - t_0) + \alpha(t - t_0). \tag{148}$$

Формула (148) имеет интересный геометрический смысл (черт. 32). Прежде всего, левая часть совпадает с вектором смещения $\overline{M_0M}$, переводящим нас из данной точки $M_0(t_0)$ в некоторую другую точку кривой $M(t)$. Этот вектор смещения (вектор-хорда) в правой части разложен на два слагаемых. Первое из них равно вектору-производной в точке t с численным коэфициентом $t - t_0$ и, следовательно, направлено по касательной в точке M_0 (на чертеже — вектор $\overline{M_0M'}$). Второе на черт. 32 изображено вектором $\overline{M'M}$.



Черт. 32.

Пусть теперь t стремится к фиксированному t_0. Тогда во втором слагаемом бесконечно малый коэфициент $t - t_0$ стоит при бесконечно малом векторе α, так что мы имеем здесь вектор, модуль которого — бесконечно малая высшего порядка по сравнению с приращением аргумента $t - t_0$. Что же касается первого слагаемого, то так как $\mathbf{r}'(t_0)$ остается постоянным, то $\mathbf{r}'(t_0)(t - t_0)$ меняется пропорционально приращению аргумента $t - t_0$, сохраняя постоянное направление по касательной.

Таким образом *вектор $\overline{M_0M}$, выражающий смещение из точки M_0 в бесконечно близкую точку M по кривой, распадается на смещение $\overline{M_0M'}$ по касательной, пропорциональное приращению аргумента $t - t_0$, и на вектор с модулем, бесконечно малым высшего порядка сравнительно с $t - t_0$.*

Смещение $\overline{M_0M'}$ мы будем называть главной частью смещения $\overline{M_0M}$ [т. е. главной частью приращения вектор-функции $\mathbf{r}(t)$] или *дифференциалом* вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ в точке $t = t_0$:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t_0)\,dt, \quad \text{где} \quad dt = t - t_0. \tag{149}$$

Отсюда

$$\mathbf{r}'(t_0) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{149'}$$

Как и обычно, дифференциал аргумента здесь совпадает с его приращением. Мы видим, что, введя понятие дифференциала вектор-функции, можно рассматривать ее производную как отношение дифференциалов.

Особенно наглядной становится формула (148), если истолковать вектор-функцию $\mathbf{r}(t)$ кинематически, придав t физический смысл времени, и считать, что (138) выражает для некоторой точки закон движения (вообще говоря, криволинейного и неравномерного). Тогда (148) показывает, что если пренебречь бесконечно малыми высшего порядка, то в бесконечно малом промежутке времени вблизи момента $t = t_0$ смещение точки $\overline{M_0M}$ можно заменить через $\mathbf{r}'(t_0)(t - t_0)$, т. е. считать прямолинейным (направленным по касательной) и равномерным (пропорциональным протекшему времени $t - t_0$). Скорость этого равномерного и прямолинейного движения по величине и направлению задается, очевидно, вектором $\mathbf{r}'(t_0)$, отчего $\mathbf{r}'(t_0)$ и называется мгновенной скоростью в момент $t = t_0$ уже в отношении криволинейного и неравномерного движения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

§ 14. Ряд Тэйлора для вектор-функции.

В дальнейших выкладках у нас будет играть большую роль разложение вектор-функции в ряд Тэйлора. Вывод этого разложения не представляет собой чего-нибудь принципиально нового и просто использует соответствующее разложение для скалярных функций.

Вектор-функцию $\mathbf{r}(t)$ всегда можно представить в виде

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}, \quad T_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{150}$$

разложив ее по единичным взаимно ортогональным векторам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

Разложим теперь в ряд Тейлора по степеням разности $t - t_0$ каждую из функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Здесь t_0 — произвольное фиксированное значение t. Во всех трех случаях разложение остановим на члене n-й степени, поместив далее остаточный член. Получим

$$x(t) = x(t_0) + x'(t_0)\frac{t - t_0}{1} + x''(t_0)\frac{(t - t_0)^2}{1 \cdot 2} + \ldots + x^{(n)}(t_0)\frac{(t - t_0)^n}{n!} + \\ + x^{(n+1)}(t_1)\frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)\frac{t - t_0}{1} + y''(t_0)\frac{(t - t_0)^2}{1 \cdot 2} + \ldots + y^{(n)}(t_0)\frac{(t - t_0)^n}{n!} + \\ + y^{(n+1)}(t_2)\frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$z(t) = z(t_0) + z'(t_0)\frac{t - t_0}{1} + z''(t_0)\frac{(t - t_0)^2}{1 \cdot 2} + \ldots + z^{(n)}(t_0)\frac{(t - t_0)^n}{n!} + \\ + z^{(n+1)}(t_3)\frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

В остаточных членах этих разложений под знаком $n+1$-й производной фигурируют некоторые промежуточные между t_0 и t значения t_1, t_2, t_3, конечно, вообще говоря, различные между собой.

Умножим на вектор $\mathbf{i}$ обе части первого равенства, на $\mathbf{j}$ — обе части второго, на $\mathbf{k}$ — третьего. Складывая все три равенства и объединяя члены с одинаковыми степенями $t-t_0$, получим

$$x(t)\,\mathbf{i}+y(t)\,\mathbf{j}+z(t)\,\mathbf{k}=\{x(t_0)\,\mathbf{i}+y(t_0)\,\mathbf{j}+z(t_0)\,\mathbf{k}\}+$$
$$+\{x'(t_0)\,\mathbf{i}+y'(t_0)\,\mathbf{j}+z'(t_0)\,\mathbf{k}\}(t-t_0)+$$
$$+\{x''(t_0)\,\mathbf{i}+y''(t_0)\,\mathbf{j}+z''(t_0)\,\mathbf{k}\}\frac{(t-t_0)^2}{2!}+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\{x^{(n)}(t_0)\,\mathbf{i}+y^{(n)}(t_0)\,\mathbf{j}+z^{(n)}(t_0)\,\mathbf{k}\}\frac{(t-t_0)^n}{n!}+$$
$$+\{x^{(n+1)}(t_1)\,\mathbf{i}+y^{(n+1)}(t_2)\,\mathbf{j}+z^{(n+1)}(t_3)\,\mathbf{k}\}\frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (150')$$

Мы получили тем самым разложение в ряд Тэйлора вектор-функции $\mathbf{r}(t)$. Действительно, в левой части стоит сама $\mathbf{r}(t)$, как видно из (150); в правой части в первой скобке стоит ее значение при $t=t_0$, $\mathbf{r}(t_0)$, во второй скобке значение ее производной при $t=t_0$, $\mathbf{r}'(t_0)$, в третьей скобке то же самое для второй производной $\mathbf{r}''(t_0)$ и т. д.; в предпоследней скобке стоит $\mathbf{r}^{(n)}(t_0)$. В этом мы немедленно убеждаемся, диференцируя равенство (150) один, два, три, ..., n раз по t почленно по известным нам из § 11 правилам и вставляя в результат значение $t=t_0$. Что же касается последней скобки, то здесь стоит вектор, который мы для краткости обозначим через $\mathbf{Q}_n$:

$$\mathbf{Q}_n=x^{(n+1)}(t_1)\,\mathbf{i}+y^{(n+1)}(t_2)\,\mathbf{j}+z^{(n+1)}(t_3)\,\mathbf{k}. \quad (151)$$

Так как, рассматривая $x^{(n+1)}(t)$, $y^{(n+1)}(t)$, $z^{(n+1)}(t)$, мы тем самым, по принятому нами соглашению, предполагаем непрерывность этих функций в промежутке $T_0\leqslant t\leqslant T$, то в этом же промежутке они будут и ограничены при всех значениях t, оставаясь по абсолютной величине меньше некоторого постоянного. В частности, и коэфициенты в (151), т. е. координаты вектора $\mathbf{Q}_n$, будут ограничены при любых значениях t_1, t_2, t_3, а потому и модуль этого вектора остается во всех случаях ограниченным:

$$|\mathbf{Q}_n|<C_n, \quad (151')$$

где C_n — *положительное постоянное, одно и то же при любых значениях* t и t_0 *в промежутке* T_0, T. Представить $\mathbf{Q}_n$ в виде значения $\mathbf{r}^{(n+1)}(t)$ при некотором промежуточном значении t, вообще говоря, нельзя. Но это не представляет какой-либо потери, так как существенной является лишь оценка (151').

Перепишем теперь (150'), заменяя в нем скобки их указанными выше значениями. Получим

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(t_0)+\mathbf{r}'(t_0)\frac{t-t_0}{1}+\mathbf{r}''(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{1\cdot 2}+\cdots+\mathbf{r}^{(n)}(t_0)\frac{(t-t_0)^n}{n!}+$$
$$+\mathbf{Q}_n\frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (152)$$

Это и есть разложение в ряд Тэйлора вектор-функции скалярного аргумента, вполне подобное обычному, если не считать более сложного вида векторного коэфициента $\mathbf{Q}_n$ в остаточном члене.

Возьмем, в частности, это разложение при $n=1$:

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(t_0)+\mathbf{r}'(t_0)(t-t_0)+\mathbf{Q}_1\frac{(t-t_0)^2}{2}$$

или

$$\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)=\mathbf{r}'(t_0)(t-t_0)+\mathbf{Q}_1\frac{(t-t_0)^2}{2}. \qquad (152')$$

Мы видим, что (152′) представляет уточнение формулы (148); роль α играет здесь $\frac{1}{2}\mathbf{Q}_1(t-t_0)$, где $\mathbf{Q}_1$ ограничено по модулю.

Для вычисления длины дуги кривой, к которому мы сейчас перейдем, нам будет полезно оценить здесь разность длин хорды (черт. 32)

$$\overline{M_0M}=\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_0)$$

и соответствующего смещения по касательной (дифференциала)

$$\overline{M_0M'}=\mathbf{r}'(t_0)(t-t_0)=d\mathbf{r}.$$

Сейчас мы берем значения t_0 и t произвольно, не предполагая, что t обязательно стремится к t_0. Согласно (152′) разность самих векторов имеет вид

$$\overline{M_0M}-\overline{M_0M'}=\mathbf{Q}_1\frac{(t-t_0)^2}{2} \quad \text{или} \quad \overline{M'M}=\mathbf{Q}_1\frac{(t-t_0)^2}{2}.$$

По элементарным свойствам треугольника M_0MM' взятая по модулю разность двух сторон всегда меньше или равна третьей стороне, т. е.

$$|M_0M-M_0M'|\leqslant M'M.$$

Здесь M_0M, M_0M', $M'M$ означают длины (модули) векторов $\overline{M_0M}$, $\overline{M_0M'}$, $\overline{M'M}$. Но так как

$$\overline{M'M}=\frac{1}{2}\mathbf{Q}_1(t-t_0)^2,$$

то, пользуясь ограниченностью $\mathbf{Q}_1$ по модулю [см. (151′)], получим

$$M'M=\frac{1}{2}|\mathbf{Q}_1|(t-t_0)^2\leqslant\frac{1}{2}C_1(t-t_0)^2$$

и, следовательно,

$$|M_0M-M_0M'|\leqslant\frac{1}{2}C_1(t-t_0)^2, \qquad (153)$$

где M_0M — *любая* хорда нашей кривой, соединяющая какую-то точку $M_0(t_0)$ с какой-то точкой $M(t)$, а M_0M' — соответствующий отрезок, отложенный по касательной в точке M_0 [т. е. длина вектора-дифференциала $\mathbf{r}'(t_0)(t-t_0)$]. Это и есть нужная нам оценка. Существенно здесь то, что C_1 имеет одно и то же значение при *любых* значениях

t_0, t в промежутке T_0, T, т. е. одно и то же значение при *любом* выборе точек M_0, M на рассматриваемой кривой $\mathbf{r}(t)$, $T_0 \leqslant t \leqslant T$.

§ 15. Длина дуги как параметр.

Переходим к определению и вычислению длины дуги. Рассмотрим кривую

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad T_0 \leqslant t \leqslant T.$$

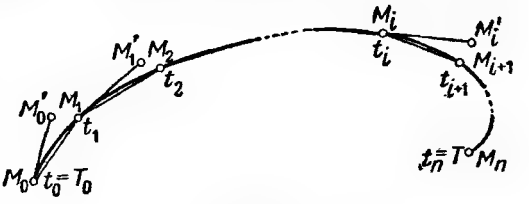
Вставим между крайними значениями T_0 и T параметра t произвольно выбранные последовательные промежуточные значения

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n.$$

Мы считаем при этом, что t_0 совпадает с T_0, а t_n с T. Кривая разобьется выбранными нами точками на n кусков (черт. 33). Возьмем какой-нибудь из них, M_iM_{i+1}, отвечающий переходу от $t = t_i$ к $t = t_{i+1}$, построим хорду M_iM_{i+1} и соответствующий вектор-дифференциал

$$\overrightarrow{M_iM_i'} = \mathbf{r}'(t_i)(t_{i+1} - t_i),$$

направленный по касательной в точке M_i. Таким образом построение черт. 32 повторено здесь для каждого перехода от t_i к t_{i+1}.



Четр. 33.

Составим сумму длин всех хорд M_iM_{i+1}, т. е. длину ломаной $M_0M_1M_2 \ldots M_n$, вписанной в нашу кривую:

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_iM_{i+1}. \tag{154}$$

С другой стороны, составим сумму длин всех соответствующих отрезков по касательным

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_iM_i' = \sum_{i=0}^{n-1} |\mathbf{r}'(t_i)|(t_{i+1} - t_i). \tag{155}$$

Мы утверждаем, что разность между суммами (154) и (155) стремится к нулю, когда разбиение кривой бесконечно измельчается, т. е. когда берется такая последовательность разбиений, что Δ, наибольшая из разностей $t_{i+1} - t_i$ в данном разбиении, стремится к нулю:

$$\Delta \to 0, \quad \text{где} \quad \Delta \geqslant t_{i+1} - t_i.$$

Действительно, составим эту разность:

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_iM_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} M_iM_i' = \sum_{i=0}^{n-1} (M_iM_{i+1} - M_iM_i').$$

Так как модуль суммы не превосходит суммы модулей слагаемых, то

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} M_iM_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} M_iM_i'\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |M_iM_{i+1} - M_iM_i'|.$$

Пользуясь оценкой (153), усилим неравенство, увеличив правую часть:

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} M_iM_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} M_iM_i'\right| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} C_1(t_{i+1}-t_i)^2.$$

(Как мы знаем, C_1 имеет одно и то же значение для всех хорд нашей кривой, в частности для всех хорд M_iM_{i+1}.)

Снова усилим неравенство, заменив в каждом слагаемом правой части один из множителей $(t_{i+1}-t_i)$ наибольшим из значений этой разности Δ. Получим

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} M_iM_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} M_iM_i'\right| \leqslant \frac{1}{2} C_1\Delta \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i) =$$

$$= \frac{1}{2} C_1\Delta(t_n - t_0) = \frac{1}{2} C_1\Delta(T - T_0).$$

Так как бесконечное измельчение разбиения означает стремление Δ к нулю, остальные же множители постоянные, то правая, а следовательно, и левая часть неравенства стремятся к нулю.

Наше утверждение доказано. Что же касается суммы (155), то ее можно рассматривать как интегральную сумму для скалярной положительной функции от t:

$$f(t) = |\mathbf{r}'(t)|,$$

построенную на промежутке изменения аргумента t от $T_0 = t_0$ до $T = t_n$. Поэтому при бесконечном измельчении разбиения сумма (155) стремится как к пределу к интегралу

$$\int_{T_0}^{T} |\mathbf{r}'(t)|\,dt. \tag{156}$$

Следовательно, и сумма (154), отличаясь от суммы (155) на бесконечно малую, стремится к тому же самому пределу.

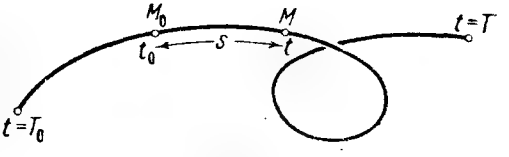
Итак, *длина ломаной* (154), *вписанной в нашу кривую, стремится при бесконечном измельчении разбиения к пределу* (156); *этот предел называется длиной нашей кривой.*

При доказательстве мы использовали существование непрерывной второй производной $\mathbf{r}''(t)$. Можно было бы ограничиться более слабыми предположениями, на чем мы не останавливаемся, так как раз навсегда предположили существование производных до любого нужного нам порядка.

Ранее уже говорилось о том, что выбор параметра t на данной кривой является в сущности произвольным. Это вносит некоторую путаницу в изучение кривой, в том смысле, что рассматриваемые величины отражают как геометрические свойства, присущие кривой самой по себе, так и произвол в выборе параметризации.

Можно устранить это усложнение, *выбрав параметризацию, геометрически связанную с самой кривой, а именно выбрав за параметр длину дуги.* Тогда при изучении кривой, заданной уравнением (138), сама параметризация и все связанные с ней величины геометрически вытекают из свойств самой кривой без какого-либо существенного произвола.

Пусть у нас дана кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где t меняется в пределах от T_0 до T. Фиксируем на кривой какую-нибудь точку $M_0(t_0)$ в качестве начала отсчета (черт. 34).



Черт. 34.

Пусть теперь $M(t)$ — любая точка на кривой; по формуле (156) длина участка кривой M_0M от значения параметра t_0 до значения t (обозначим ее через s) выразится интегралом

$$s = \overset{\smile}{M_0M} = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{r}'(t)|\, dt. \tag{157}$$

В выражении (156) верхний предел интеграла был больше нижнего и длина кривой получалась как величина положительная. В формуле (157) мы будем брать значения t как бо́льшие t_0, так и меньшие t_0, в связи с чем длина дуги s будет получаться со знаком $+$ в первом случае и — во втором случае. Итак, s выражена как функция верхнего предела t

$$s = s(t). \tag{158}$$

Диференцируя выражение (157) по верхнему пределу t интеграла, получим

$$s'(t) = |\mathbf{r}'(t)|. \tag{158'}$$

По предположению, сделанному в конце § 12, $\mathbf{r}'(t) \neq 0$, и следовательно,

$$|\mathbf{r}'(t)| > 0.$$

Производная $s'(t)$ положительна все время, и $s(t)$ — функция, монотонно возрастающая от значения $s(T_0)$ (отрицательного) при $t = T_0$ до значения $s(T)$ (положительного) при $t = T$ и проходящая через 0 при $t = t_0$. Такая функция допускает обращение, т. е. уравнение (158) можно однозначно разрешить относительно t, выразив t функцией от s:

$$t = t(s), \quad s(T_0) \leqslant s \leqslant s(T).$$

Таким образом не только каждой точке $M(t)$ отвечает определенное значение s, но и каждому значению s в указанной области изменения

однозначно отвечает точка $M(t)$ на кривой. Мы можем принять s за новый параметр вдоль кривой, геометрически с ней вполне связанный. Несущественный произвол заключается лишь в выборе начала отсчета M_0, а также направления, в котором дуга возрастает.

Вставляя выражение $t = t(s)$ в уравнение кривой, получим

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s)),$$

т. е. радиус-вектор выражен в функции параметра s. Теоретически мы обычно и будем считать, что уравнение кривой записано именно таким образом. Но практически переход к параметру s может быть в конкретных случаях нецелесообразным в силу технических трудностей в выкладках. Поэтому сохраняют свое значение многие вычислительные формулы, записанные для произвольной параметризации кривой.

В заключение укажем некоторые простые следствия. Умножив обе части (158′) на dt, получим

$$s'(t)\,dt = |\mathbf{r}'(t)|\,dt.$$

Возьмем правую и левую части этого равенства по модулю; получим

$$|ds| = |d\mathbf{r}|. \qquad (158'')$$

Таким образом *модуль дифференциала длины дуги равен модулю дифференциала радиуса-вектора* (все это *при произвольной параметризации t вдоль кривой*). Таким образом геометрически дифференциал дуги $|ds|$ изображается (см. черт. 32) длиной отрезка касательной M_0M', так как этот отрезок, взятый как вектор, изображает $d\mathbf{r}$. Путь же $\overset{\frown}{M_0M}$, пройденный по кривой, дает не дифференциал, а соответствующее точное приращение функции $s(t)$ при переходе от одной точки кривой к другой. В частности, формула (158″) остается верной и при выборе дуги s в качестве параметра. Деля обе части на $|ds|$, получим

$$1 = \left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right|, \qquad (158''')$$

т. е. производная радиуса-вектора по параметру-дуге есть вектор *единичный*. Случайный характер модуля $|\mathbf{r}'(t)|$, о котором говорилось выше, теперь исчезает. Наконец, формулу (158″) легко представить *в координатной форме*, что имеет особенное значение при решении конкретных задач. Если кривая задана параметрически представлением (140), то можно выразить радиус-вектор в функции того же t:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}.$$

Дифференцируя это равенство по t, получаем

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k},$$

а умножая на dt, находим

$$d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}.$$

По известной формуле для модуля вектора (корень квадратный из суммы квадратов координат) получаем

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2},$$
$$|d\mathbf{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Сравнивая последние равенства с (158′) и (158″), мы видим, что

$$s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}, \quad |ds| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \tag{159}$$

Выражение (156) для длины кривой примет вид

$$\int_{T_0}^{T} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt. \tag{159′}$$

При фактическом вычислении длины дуги пользуются обычно формулой (159′). В частности, когда параметром служит абсцисса x ($x_0 \leqslant x \leqslant x_1$), формула (159′) принимает вид

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2}\, dx.$$

Пример. Длина дуги в полярных координатах.

Рассмотрим в плоскости X, Y кривую, заданную в полярных координатах уравнением

$$r = r(\varphi).$$

Тогда, как мы знаем, можно перейти к параметрической записи уравнения, приняв φ за параметр [см. (34)]:

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi, \quad z = 0.$$

Последнее уравнение выражает, что кривая лежит в плоскости X, Y. Вычисляя производные по параметру:

$$x' = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi,$$
$$y' = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi,$$
$$z' = 0,$$

и беря сумму их квадратов, получим

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2$$

или, после умножения на $d\varphi^2$,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Отсюда формулы (159) принимают вид

$$s'(\varphi) = \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2}, \quad ds = \sqrt{dr^2 + r^2\ \varphi^2}, \tag{160}$$

а длина дуги равна

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{r'(\varphi)^2 + r(\varphi)^2}\, d\varphi.$$

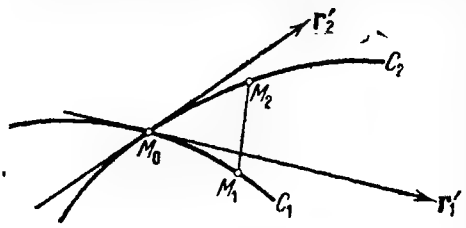
Упражнение.

Вычислить длину дуги эпициклоиды, гипоциклоиды, циклоиды (см. § 7) от начальной точки $\varphi = 0$ до произвольной точки $\varphi < 2\pi$.

Отв. $4a\lambda(1+\lambda)\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)$, $4a\lambda(1-\lambda)\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)$, $4a\left(1-\cos\frac{\varphi}{2}\right)$.

§ 16. Касание кривых.

При изучении кривых в бесконечно малом часто играет важную роль порядок близости между двумя кривыми, выходящими из одной точки. Так, допустим, что нужно составить себе представление о поведении криной в бесконечно малом с определенной степенью точности. Тогда подбираем другую кривую, которая с этой степенью точности совпадает с первой. Если вторая кривая обладает хорошо известным строением (является, например окружностью), то тем самым мы получаем представление и о ходе первой кривой (в бесконечно малой области).



Черт. 35.

Изучим взаимное расположение двух каких-нибудь кривых C_1 и C_2, выходящих из общей точки M_0. На каждой из них примем за параметр длину дуги s, так что уравнения кривых будут

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(s), \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(s). \tag{161}$$

Примем для простоты точку M_0 за начало отсчета на обеих кривых, так что

$$\mathbf{r}_1(0) = \mathbf{r}_2(0) = \overline{OM_0}. \tag{161'}$$

Во всем дальнейшем будем обозначать последовательные производные от какой-нибудь функции по параметру s через $\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ldots, \mathbf{r}^{(n)}, \ldots$, в отличие от производных $\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \ldots, \mathbf{r}^{(n)}, \ldots$ той же самой функции, но по произвольному параметру t вдоль кривой [1]).

---

[1]) Производные по параметру s, имеющему в дифференциальной геометрии особое значение, мы обозначаем точками, подобно тому как в механике точками обозначаются производные по времени.

В некоторых руководствах по дифференциальной геометрии производные по параметру s обозначаются штрихами.

В пределах этого параграфа нам понадобятся значения производных от $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ по s лишь в точке M_0; мы будем их писать без указания аргумента, подразумевая, следовательно, аргумент $s=0$.

Изучим расхождение между кривыми C_1 и C_2, которое обнаруживается, когда мы из общей точки M_0 сместимся на одно и то же расстояние s, заданное с определенным знаком (вдоль каждой из кривых C_1 и C_2). Обозначим через M_1 и M_2 точки, куда мы таким образом приходим (черт. 35). Другими словами, мы берем на C_1 и C_2 соответственно точки M_1 и M_2, отвечающие одному и тому же значению параметра s. Итак,

$$s=\overset{\frown}{M_0M_1}=\overset{\frown}{M_0M_2},$$

или, что то же,

$$\overline{OM}_1=\mathbf{r}_1(s),\quad \overline{OM}_2=\mathbf{r}_2(s).$$

Расхождение между кривыми C_1 и C_2 естественно оценить в связи с расстоянием M_1M_2 между точками M_1 и M_2. Чем выше будет порядок малости расстояния M_1M_2 относительно s, тем слабее расхождение кривых, тем теснее они сближены между собой.

Переходим теперь к выполнению этой оценки. Разложим $\mathbf{r}_1(s)$ и $\mathbf{r}_2(s)$ в ряд Тэйлора по степеням s. Получим

$$\left.\begin{aligned}\overline{OM}_1&=\mathbf{r}_1(s)=\mathbf{r}_1+\dot{\mathbf{r}}_1 s+\ddot{\mathbf{r}}_1\frac{s^2}{2}+\ldots+\overset{(n)}{\mathbf{r}}_1\frac{s^n}{n!}+\ldots\\ \overline{OM}_2&=\mathbf{r}_2(s)=\mathbf{r}_2+\dot{\mathbf{r}}_2 s+\ddot{\mathbf{r}}_2\frac{s^2}{2}+\ldots+\overset{(n)}{\mathbf{r}}_2\frac{s^n}{n!}+\ldots\end{aligned}\right\}\qquad(161'')$$

Здесь значения $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ и их производных взяты в точке M_0. Ряд Тэйлора предполагается конечным, но остаточный член не выписан, так как для дальнейшего вполне достаточно знать, что этот член будет, при s, стремящемся к нулю, бесконечно малым более высокого порядка, чем любой из неравных нулю предшествующих членов [см. (152); при $t-t_0$, стремящемся к нулю, это следует из ограниченности $\mathbf{Q}_n$ по модулю].

Вектор M_1M_2 легко получить теперь как разность радиусов-векторов:

$$\begin{aligned}\overline{M_1M_2}=(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)+(\dot{\mathbf{r}}_2-\dot{\mathbf{r}}_1)\frac{s}{1}+(\ddot{\mathbf{r}}_2-\ddot{\mathbf{r}}_1)\frac{s^2}{2!}+\ldots\\ \ldots+(\overset{(n)}{\mathbf{r}}_2-\overset{(n)}{\mathbf{r}}_1)\frac{s^n}{n!}+\ldots\end{aligned}\qquad(162)$$

Заставим теперь s стремиться к нулю; тогда M_1 и M_2 будут точки C_1 и C_2, отстоящие от M_0 на одно и то же бесконечно малое расстояние s и стремящиеся, следовательно, в M_0, каждая по своей кривой. Чтобы оценить порядок малости M_1M_2 сравнительно с s, обратимся к разложению (162). Первая скобка в нем равна 0, так как M_0 — точка общая и $\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_1$ [см. (161′)].

Теперь разберем различные возможные здесь случаи. Наиболее общим является тот, когда $\dot{\mathbf{r}}_1$ и $\dot{\mathbf{r}}_2$ *неколлинеарны*, другими словами,

касательные к C_1 и C_2 в общей точке M_0 не совпадают, образуя угол, отличный от нуля (черт. 35). Тогда разложение (162) начинается с члена

$$(\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1)\, s,$$

отличного от нуля и бесконечно малого одного порядка с s. Так как старший член определяет порядок малости и всего разложения, то $\overline{M_1M_2}$ будет бесконечно малым того же порядка, т. е. одного порядка с длинами дуг $\overset{\frown}{M_0M_1} = \overset{\frown}{M_0M_2}$. Это — случай *пересечения* кривых C_1 и C_2. Он вполне тривиален, и мы больше на нем не останавливаемся.

Рассмотрим теперь другой возможный случай, когда $\dot{\mathbf{r}}_1$ и $\dot{\mathbf{r}}_2$ *коллинеарны*, другими словами, касательные к C_1 и C_2 в точке M_0 совпадают. Мы говорим в этом случае, что C_1 и C_2 имеют *касание* в точке M_0. Так как согласно (158‴) векторы $\dot{\mathbf{r}}_1$ и $\dot{\mathbf{r}}_2$ единичные, то они, будучи направлены по общей касательной, или совпадают между собой или отличаются знаком:

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = -\dot{\mathbf{r}}_1. \tag{163}$$

Условимся этот последний случай исключить раз навсегда из рассмотрения. Если бы, действительно, такой случай представился, то мы изменили бы на одной кривой (например C_1) направление отсчета на обратное, т. е. в качестве параметра ввели бы $-s$ вместо s. Конечно, $-s$ это та же длина дуги, отсчитываемой от M_0, но только с другим положительным направлением отсчета. Тогда, ввиду изменения знака у аргумента, $\dot{\mathbf{r}}_1$ изменило бы знак, и (163) превратилось бы в равенство

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_1. \tag{163'}$$

Итак, *направления отсчета на C_1 и C_2 всегда можно согласовать так, что будет иметь место* (163'), *а случай* (163) *устранится из рассмотрения*. Это согласование мы будем предполагать в дальнейшем выполненным. Геометрический смысл его в том, что теперь при одинаковых значениях s мы будем смещаться по обеим кривым *по одну и ту же сторону точки M_0*. А только при этом условии имеет смысл рассматривать расстояние M_1M_2 и оценивать порядок его малости (при смещении в разные стороны этот порядок всегда 1-й независимо от степени близости кривых между собой).

Возвращаясь к разложению (162), видим, что в силу (163') член первой степени пропал и оно начинается с члена 2-го порядка малости относительно s:

$$(\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1)\frac{s^2}{2}.$$

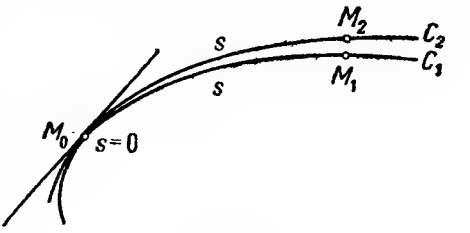
А так как остальные члены разложения еще более высокого порядка, то *в случае касания расстояние M_1M_2 — бесконечно малое не ниже 2-го порядка относительно s*. Этим существенно и отличается случай касания от случая пересечения.

Кривые C_1 и C_2, касаясь друг друга, могут сближаться между собой в некоторых случаях особенно тесно (черт. 36). Точнее говоря, расстояние M_1M_2, которое большей частью оказывается бесконечно малым 2-го порядка относительно s, может иметь в некоторых случаях и более высокий порядок малости. Так, если кроме $\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_1$ в точке M_0 имеет еще место $\ddot{\mathbf{r}}_2 = \ddot{\mathbf{r}}_1$, то разложение (162) содержит лишь бесконечно малые не ниже 3-го порядка.

Рассмотрим общий случай. В точке M_0, общей C_1 и C_2, мы имеем, очевидно, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$; пусть, кроме того,

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_2, \quad \ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_2, \ \ldots, \quad \overset{(n)}{\mathbf{r}}_1 = \overset{(n)}{\mathbf{r}}_2, \tag{164}$$

где точки означают диференцирование по дуге. Тогда в разложении (162) пропадают все члены до n-й степени включительно, так что *расхождение M_1M_2 является бесконечно малым не ниже $n+1$-го порядка относительно смещения s.* Тогда и только тогда мы говорим, что кривые имеют в M_0 *касание n-го порядка.* Как мы видим, смысл его заключается в том, что если рассматривать бесконечно малые 1-го, 2-го, ..., n-го порядка, но пренебрегать более высокими порядками малости, то расхождением M_1M_2 придется пренебречь, и кривые C_1 и C_2 станут в M_0 в бесконечно малом неотличимыми друг от друга.



Черт. 36.

Если при этом M_1M_2 есть бесконечно малое *точно $n+1$-го порядка* (а не выше), то мы говорим, что налицо *касание точно n-го порядка.* Для касания точно n-го порядка к условиям (164) нужно добавить неравенство

$$\overset{(n+1)}{\mathbf{r}}_1 \neq \overset{(n+1)}{\mathbf{r}}_2, \tag{164'}$$

гарантирующее необращение в нуль члена $n+1$-й степени относительно s в разложении (162).

Наиболее общим случаем касания является касание 1-го порядка, когда $n = 1$, и условие (164) состоит только из одного первого равенства.

Подведем итоги. *Кривые C_1 и C_2 могут иметь в общей точке M_0 или пересечение (если $\dot{\mathbf{r}}_1$ и $\dot{\mathbf{r}}_2$ неколлинеарны), или касание (если $\dot{\mathbf{r}}_1$ и $\dot{\mathbf{r}}_2$ коллинеарны). Касание будет порядка $n = 1, 2, 3, \ldots$ в зависимости от того, сколько последовательных производных от радиуса-вектора по дуге $\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dddot{\mathbf{r}}, \ldots$ совпадут для обеих кривых в их общей точке.*

Этим исчерпываются все могущие представиться здесь случаи (направления отсчета предполагаем согласованными).

Мы принимаем для простоты точку M_0 за начало отсчета дуги s. Но очевидно, что если на C_1 и C_2 изменить начало отсчета произ-

вольно, то это будет означать лишь добавление к параметру s некоторой постоянной. Значения производных по s не изменятся, и условия (164) сохранят свой вид.

Запишем теперь условия касания n-го порядка (164) в *координатной* форме. Совпадение векторов

$$\dot{\mathbf{r}},\ \ddot{\mathbf{r}},\ \ldots,\ \overset{(n)}{\mathbf{r}}$$

для обеих кривых в точке M_0 равносильно совпадению соответствующих координат этих векторов. Но разлагая для какой-нибудь кривой $\mathbf{r}(s)$ по $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, получим

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} + z(s)\,\mathbf{k},$$

где x, y, z — текущие координаты по кривой, выраженные в функции параметра s. Дифференцируя последовательно по s, получим

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}} &= \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k},\\
\ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\overset{(n)}{\mathbf{r}} &= \overset{(n)}{x}\mathbf{i} + \overset{(n)}{y}\mathbf{j} + \overset{(n)}{z}\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Условия (164) примут следующий вид: *в общей точке M_0 производные по дуге от текущих координат*

$$\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z};\quad \ddot{x},\ \ddot{y},\ \ddot{z};\quad \ldots;\quad \overset{(n)}{x},\ \overset{(n)}{y},\ \overset{(n)}{z} \tag{165}$$

должны иметь одинаковые значения для обеих кривых C_1 и C_2.

Допустим, далее, что уравнение какой-нибудь кривой представлено вблизи M_0 в виде

$$y = f(x),\quad z = g(x),$$

что всегда возможно, так как мы рассматриваем только обыкновенные точки. Если вычислить последовательные производные от y и z по x

$$f',\ f'',\ \ldots,\ f^{(n)},\ g',\ g'',\ \ldots,\ g^{(n)} \tag{165'}$$

(тоже кончая n-м порядком), то легко видеть, что их можно выразить через производные (165) от x, y, z по дуге s.

Действительно,

$$f' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}\,ds}{\dot{x}\,ds} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}},\quad f'' = \frac{df'}{dx} = \frac{d\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}}{\dot{x}\,ds} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3} \text{ и т. д.}$$

Мы производим, коротко говоря, замену аргумента x аргументом s и все производные до n-го порядка от y, z по x выражаем через производные тоже до n-го порядка тех же переменных y, z (и самого x) по s (см. Гурса, Курс анализа, т. I, § 54).

Обратно, переходя от аргумента s к аргументу x, можно все производные (165) по s выразить через производные (165′) по x. Для этого достаточно вспомнить, что

$$|ds| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

и, следовательно, если отсчитывать s в сторону возрастания x,

$$ds = +\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}\,dx. \tag{166}$$

Отсюда легко вычислить производные до n-го порядка от s по x через производные (165′).

По тем же правилам замены аргумента выражаем производные до n-го порядка от x, y, z по s через производные до n-го порядка от s, y, z по x.

В результате *величины* (165) *выражаются через* (165′), *и обратно.*

Следовательно, совпадение величин (165) в какой-нибудь точке для двух кривых C_1 и C_2 влечет за собой такое же совпадение и для величин (165′), и обратно.

Поэтому условия (164) эквивалентны таким: *в общей точке кривых C_1 и C_2 производные вдоль них от y, z по x до n-го порядка включительно имеют общие значения.*

Условия (164), а следовательно, и (165) исчерпывали при различных значениях $n = 1, 2, 3, \ldots$ все возможные случаи касания, предполагая, однако, согласование направлений отсчета на кривых C_1 и C_2.

Отметим, что эта оговорка не нужна в последней нашей формулировке. Действительно, здесь берутся производные по x и выбор направления отсчета вообще не нужен. Когда же мы сводим эту формулировку к (165), переходя к аргументу s, то направления отсчета s на обеих кривых автоматически получаются согласованными, а именно, как видно из (166), в сторону возрастания x.

В последней формулировке мы предполагали, что уравнения кривых C_1 и C_2 имеют соответственно вид

$$y = f_1(x), \quad z = g_1(x)$$

и

$$y = f_2(x), \quad z = g_2(x).$$

Согласно нашей формулировке необходимый и достаточный признак касания n-го порядка в общей точке $M_0[x_0;\ y_0 = f_1(x_0) = f_2(x_0);\ z_0 = g_1(x_0) = g_2(x_0)]$ заключается в совпадении производных в этой точке:

$$\left.\begin{aligned} &f_1' = f_2',\ f_1'' = f_2'',\ \ldots,\ f_1^{(n)} = f_2^{(n)},\\ &g_1' = g_2',\ g_1'' = g_2'',\ \ldots,\ g_1^{(n)} = g_2^{(n)}. \end{aligned}\right\} \tag{166′}$$

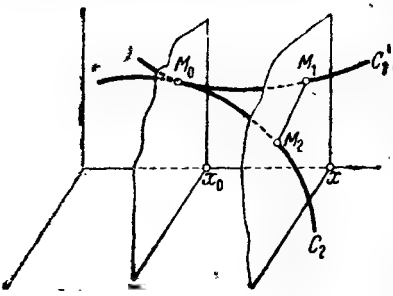
Здесь под знаком функций подразумевается аргумент $x = x_0$. Перейдем из общей точки $M_0(x_0)$ в точки M_1 и M_2 на кривых C_1 и C_2, отвечаю-

щие одному и тому же значению x (черт. 37). Оценим разность значений y для этих двух точек.

Разложим $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в ряд Тэйлора по степеням $x-x_0$:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= y_0 + f_1'(x_0)(x-x_0) + f_1''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \dots, \\ f_2(x) &= y_0 + f_2'(x_0)(x-x_0) + f_2''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + \dots. \end{aligned}\right\} \quad (167)$$

Беря разность $f_2(x)-f_1(x)$, мы замечаем, что в правой части пропадут в силу (166′) все члены до n-й степени включительно. Разложение может начаться лишь с членов $n+1$-й степени, так что при x, стремящемся к x_0, разность значений y в точках M_1 и M_2 будет бесконечно малой выше чем n-го порядка относительно $x-x_0$.



Черт. 37.

То же относится и к разности значений z в точках M_1 и M_2.

Итак, *при смещении из общей точки M_0 в бесконечно близкие точки M_1 и M_2 с общей абсциссой x мы имеем расхождение в значениях y бесконечно малое сравнительно с $x-x_0$ по крайней мере $n+1$-го порядка; и то же самое для значений z.*

Обратно, если эти условия имеют место, то разности $f_2(x)-f_1(x)$ и $g_2(x)-g_1(x)$ не могут содержать членов ниже $n+1$-й степени относительно $x-x_0$, т. е. коэфициенты при таких членах должны быть равны нулю. А эти коэфициенты, как видно из (167), будут

$$f_2'-f_1',\quad f_2''-f_1'',\quad \dots,\quad f_2^{(n)}-f_1^{(n)},$$
$$g_2'-g_1',\quad g_2''-g_1'',\quad \dots,\quad g_2^{(n)}-g_1^{(n)},$$

и их обращение в нуль приводит нас опять к (166′). Другими словами, только что формулированные условия равносильны условиям (166′) и представляют собой их геометрическое истолкование.

ГЛАВА III.

ТЕОРИЯ КРИВИЗНЫ ПЛОСКИХ КРИВЫХ.

Мы подготовили в предыдущей главе аппарат диференцирования вектор-функций и установили ряд общих понятий теории кривых. Теперь мы можем перейти к более детальному изучению геометрии кривых. Мы начнем с геометрии плоских кривых. Конечно, ее можно было бы получить как частный случай из геометрии кривых в про-

странстве, но при таком подходе легко могли бы ускользнуть многие своеобразные ее стороны. Чтобы выявить их в достаточной полноте, мы займемся в этой главе только плоскими кривыми. В следующей же главе мы перенесем наши результаты в обобщенном и расширенном виде на пространственные кривые.

Как видно из названия главы, речь будет итти о геометрических построениях, связанных с кривизной плоской кривой. И это вполне естественно, так как кривизна, степень искривленности кривой, является важнейшей геометрической характеристикой ее поведения в данной точке. Мы увидим, как это понятие различными нитями связывается с геометрией кривой.

§ 17. Касание плоских кривых и соприкасающаяся окружность.

В дополнение к результатам предыдущего параграфа, докажем еще одну теорему общего характера, относящуюся к условиям касания плоских кривых.

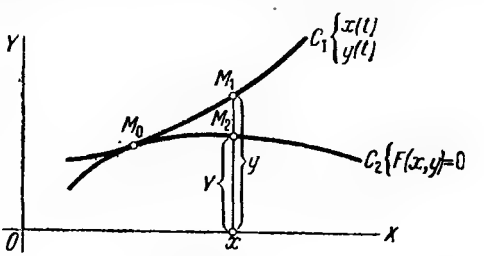
Пусть даны: кривая C_1 параметрическим представлением

$$x = x(t),$$

$$y = y(t)$$

и кривая C_2 уравнением между координатами

$$F(x, y) = 0. \qquad (168)$$



Черт. 38.

Пусть они имеют общую точку M_0, отвечающую значению параметра $t = t_0$ (черт. 38):

$$x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0).$$

Запишем, что эта точка лежит и на C_2:

$$F(x_0, y_0) = 0. \qquad (168')$$

Вставим текущие координаты $x(t)$, $y(t)$ кривой C_1 в левую часть уравнения (168) (которое, конечно, не обязано удовлетвориться). Получим некоторую функцию от t, которую обозначим через φ:

$$\varphi(t) = F[x(t), y(t)];$$

при $t = t_0$ эта функция, как видно из (168′), обращается в нуль:

$$\varphi(t_0) = 0.$$

Разложим $\varphi(t)$ в ряд Тэйлора по степеням $t - t_0$:

$$\varphi(t) = \varphi'(t_0)(t - t_0) + \varphi''(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2} + \ldots + \varphi^{(n)}(t_0)\frac{(t-t_0)^n}{n!} + \ldots$$

Если взять t переменным и стремящимся к t_0, то $\varphi(t)$ будет бесконечно малым вместе с $t - t_0$ и притом такого порядка малости, какова

степень первого члена разложения, отличного от нуля. Рассмотрим общий случай. Пусть оказалось, что

$$\varphi'(t_0) = \varphi''(t_0) = \ldots = \varphi^{(n)}(t_0) = 0. \tag{169}$$

Условия (169) вполне равносильны требованию, чтобы разложение $\varphi(t)$ начиналось с членов $n+1$-й степени или выше, т. е., *чтобы* $\varphi(t)$ *было бесконечно малым порядка выше* n*-го относительно* $t - t_0$.

Мы утверждаем, что *выполнение этого требования необходимо и достаточно для касания кривых* C_1 *и* C_2 n*-го порядка.*

Подстановка текущих координат кривой C_1 в уравнение кривой C_2 не обратит его левую часть в нуль, поскольку кривые различны; но чем выше будет порядок малости левой части вблизи t_0, тем теснее будет касание кривых.

Переходим к доказательству нашего утверждения. Ограничиваясь рассмотрением заведомо обыкновенных точек, будем считать для определенности, что для кривой C_1

$$x'(t_0) \neq 0, \quad \text{т. е.} \quad \lim_{t \to t_0} \frac{x - x_0}{t - t_0} \neq 0, \tag{170}$$

и для кривой C_2

$$F_y(x_0, y_0) \neq 0, \tag{170'}$$

и что, следовательно, каждая из кривых C_1 и C_2 может быть при желании записана вблизи M_0 заданием y как функции от x.

Возьмем на кривой C_1 какую-нибудь точку $M_1[x(t), y(t)]$ и на кривой C_2 точку M_2, отвечающую тому же значению x (черт. 38). Координаты точки M_1 обозначим через x, y [где $x = x(t)$, $y = y(t)$]; у точки M_2 абсцисса та же, а ординату обозначим через Y. Тогда уравнение (168) удовлетворяется для точки M_2, и мы имеем

$$F(x, Y) = 0.$$

Выражение же функции $\varphi(t)$ имеет, как мы помним, вид

$$\varphi(t) = F(x, y).$$

Чтобы оценить порядок малости $\varphi(t)$, удобно представить ее в виде разности

$$\varphi(t) = F(x, y) - F(x, Y),$$

что вполне законно, так как вычитаемое равно нулю. Применяем теорему о конечном приращении, рассматривая F как функцию второго аргумента при фиксированном первом. Получим

$$\varphi(t) = F_y(x, \eta)(y - Y), \tag{171}$$

где η — некоторое промежуточное между y и Y значение. Отсюда

$$\frac{\varphi(t)}{y - Y} = F_y(x, \eta). \tag{171'}$$

Пусть теперь t стремится к t_0; тогда точка M_1 стремится в M_0, равно как и точка M_2, имеющая ту же абсциссу, что и M_1. Итак,

$$x(t) \to x_0, \quad y(t) \to y_0, \quad Y \to y_0 \quad \text{при } t \to t_0.$$

Тогда значение η, заключенное между y и Y, тоже стремится к y_0, и правая часть (171′) стремится к пределу $F_y(x_0, y_0)$. Итак,

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\varphi(t)}{y - Y} = F_y(x_0, y_0).$$

Но согласно (170′) этот предел отличен от нуля, так что $\varphi(t)$ и $y - Y$ суть бесконечно малые одного порядка. К этому следует добавить, что согласно (170) $t - t_0$ и $x - x_0$ тоже суть бесконечно малые одного порядка. Поэтому *порядок малости $\varphi(t)$ относительно $t - t_0$ совпадает с порядком малости $y - Y$ относительно $x - x_0$*. Следовательно, если порядок малости $\varphi(t)$ больше n, то порядок малости $y - Y$ относительно $x - x_0$ тоже больше n, а это, как было установлено в конце предыдущего параграфа, необходимо и достаточно, чтобы кривые имели касание n-го порядка (там нам приходилось налагать такое же ограничение на разность значений z; теперь это излишне, так как мы находимся на плоскости XY, и $z = 0$).

Наше утверждение доказано. Интересно отметить, что если порядок малости $\varphi(t)$ и $y - Y$ точно $n + 1$-й (касание точно n-го порядка), то главная часть $y - Y$ будет степени $n + 1$ относительно $x - x_0$ и в случае четного n будет менять знак вместе с $x - x_0$, т. е. в зависимости от того, смещаемся ли мы из точки касания вправо или влево. Касающиеся кривые расположатся так, что вправо одна будет лежать „выше" второй, а влево — вторая „выше" первой. В случае же нечетного n $y - Y$ сохраняет постоянный знак, и по обе стороны точки касания одна кривая лежит „выше" другой.

Доказанная теорема открывает путь к решению такой задачи:

Задача. Даны кривая

$$x = x(t), \quad y = y(t) \tag{172}$$

и семейство кривых от n параметров

$$F(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0. \tag{173}$$

Всякий раз, когда мы даем параметрам $C_1, C_2, \ldots, C_n$ какие-нибудь постоянные значения, уравнение (173) определяет некоторую кривую. Совокупность всевозможных таких кривых мы и называем n-параметрическим семейством.

Требуется среди кривых семейства (173) *найти такую, которая имела бы с данной кривой* (172) *в данной ее точке $t = t_0$ касание и притом наивысшего возможного порядка.*

Смысл задачи заключается в том, что, решив ее, мы найдем кривую семейства, которая с наилучшей возможной точностью воспроизводит данную кривую (172) в ее бесконечно малом куске около точки $t = t_0$. Следует пояснить, что обычно кривая (172) берется произволь-

ной, кривые же семейства (173) — сравнительно простого строения, так что мы остаемся в выигрыше, связывая с кривой (172) более простой геометрический образ.

Решение задачи очевидно. Возьмем кривую семейства (173) пока с неопределенными параметрами $C_1, \ldots, C_n$ и обозначим через $\varphi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ результат подстановки текущих координат кривой (172) в левую часть уравнения этой кривой семейства:

$$\varphi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) = F[x(t), y(t), C_1, C_2, \ldots, C_n].$$

Прежде всего нужно потребовать, чтобы при $t = t_0$ эта функция обращалась в нуль, т. е. чтобы точка на кривой (172) $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ лежала и на выбранной нами кривой семейства:

$$\varphi(t_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0. \tag{174}$$

Далее, если мы хотим обеспечить в этой точке наилучший порядок касания кривой (172) и выбранной нами кривой семейства, нужно потребовать [согласно (169)] обращения в нуль в этой точке последовательных производных от $\varphi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ по t в возможно большем количестве:

$$\varphi'(t_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \quad \varphi''(t_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$
$$\varphi'''(t_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \ldots \tag{174'}$$

Требования (174) и (174′) представляют собой уравнения, связывающие неопределенные параметры $C_1, \ldots, C_n$. Мы продолжим систему уравнений (174′) так далеко, пока она остается совместной относительно $C_1, \ldots, C_n$. В общем виде нельзя дать точного ответа о допустимом числе уравнений (174′), но можно ожидать, что так как неизвестных n, то всего в (174) и (174′) можно дать n уравнений, т. е. в уравнениях (174′) остановиться на $n-1$-й производной. Это гарантирует касание $n-1$-го порядка.

Решая систему уравнений (174), (174′) относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$, находим кривую семейства (173), имеющую с кривой (172) в ее точке $t = t_0$ касание наивысшего возможного порядка. Вообще говоря, нужно ожидать, как мы видели, что это касание будет $n-1$-го порядка, если число параметров семейства равно n.

Решим эту задачу в двух частных случаях, из которых один дает уже известный нам результат, а второй приводит нас к очень важному понятию соприкасающейся окружности.

Рассмотрим в качестве семейства (173) *семейство всевозможных прямых на плоскости* (исключая параллели оси Y):

$$y - kx - b = 0. \tag{175}$$

Мы имеем здесь частный случай семейства кривых, зависящего от двух параметров C_1, C_2. Роль этих параметров играют k и b — постоянные, которым можно придавать любые значения.

Пусть дана какая-нибудь кривая

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

для которой мы хотим подыскать прямую семейства (175), имеющую с ней в данной ее точке $t = t_0$ касание по возможности высокого порядка. Так как в нашем случае $n = 2$, то естественно ожидать, что мы добьемся касания лишь 1-го порядка. Вставляя в левую часть (175) текущие координаты $x(t)$, $y(t)$, составим функцию $\varphi(t, k, b)$:

$$\varphi(t, k, b) = y(t) - kx(t) - b.$$

Возьмем ее производную по t:

$$\varphi'(t, k, b) = y'(t) - kx'(t).$$

Потребуем теперь выполнения при $t = t_0$ условий (174) и (174′):

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t_0, k, b) &= y_0 - kx_0 - b = 0, \\ \varphi'(t_0, k, b) &= y_0' - kx_0' \quad\ = 0. \end{aligned}\right\} \tag{176}$$

Здесь через x_0, x_0 и т. д. обозначены $x(t_0)$, $x'(t_0)$ и т. д. Из этих двух уравнений находим (допуская $x_0' \neq 0$)

$$k = \frac{y_0'}{x_0'}, \quad b = y_0 - \frac{y_0'}{x_0'} x_0.$$

Вставляя найденные теперь значения неопределенных параметров в (175), мы получаем искомую прямую семейства

$$y - \frac{y_0'}{x_0'} x - y_0 + \frac{y_0'}{x_0'} x_0 = 0 \quad \text{или} \quad y - y_0 = \frac{y_0}{x_0'} (x - x_0),$$

в которой без труда узнаем касательную к кривой $x(t)$, $y(t)$ в точке $t = t_0$. Она и является той из прямых (175), которая имеет наилучшее касание с кривой в данной точке. Параметры k, b у выбранной нами прямой семейства удовлетворяли уравнениям (176), т. е. уравнению (174) и *первому* из уравнений (174′). Это гарантирует нам касание 1-го порядка, как оно и будет, вообще говоря, в действительности. Посмотрим, однако, нельзя ли удовлетворить еще одному из уравнений (174′), т. е. обратить в нуль еще и вторую производную:

$$\varphi''(t_0, k, b) = y_0'' - kx_0'' = 0.$$

Сопоставляя это требование с последним из уравнений (176), мы видим, что оно, вообще говоря, ему противоречит, за исключением точек, где

$$\begin{vmatrix} x_0' & x_0'' \\ y_0' & y_0'' \end{vmatrix} = 0. \tag{176′}$$

Следовательно, в этом и только в этом случае в точке t_0 кривой $x(t)$, $y(t)$ можно подобрать прямую (касательную) с порядком касания выше первого.

Таким образом (176′) есть необходимый и достаточный признак точек распрямления (см. § 2), наиболее типичный случай которых представляют точки перегиба.

Соприкасающаяся окружность

Переходим к другому частному случаю, который приведет нас уже к новому понятию, играющему большую роль в дифференциальной геометрии.

Возьмем в качестве семейства кривых (173) семейство всевозможных окружностей на плоскости:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0. \tag{177}$$

Мы имеем здесь частный случай семейства кривых, зависящего от трех параметров C_1, C_2, C_3, роль которых играют здесь произвольные постоянные a, b, R (координаты центра и радиус окружности).

Мы ставим себе задачей так подобрать эти постоянные, т. е. выбрать из всевозможных окружностей такую, чтобы она с данной кривой

$$x=x(t),\quad y=y(t)$$

в данной ее точке t_0 имела касание по возможности высокого порядка. Так как число параметров n в нашем случае равно 3, то мы можем рассчитывать обеспечить касание 2-го порядка. ***Окружность, которая в данной точке кривой имеет с нею касание 2-го порядка, называется соприкасающейся окружностью в этой точке.***

Составляем функцию $\varphi(t, a, b, R)$, подставляя в левую часть (177) текущие координаты $x(t)$, $y(t)$ данной кривой:

$$\varphi(t, a, b, R)=[x(t)-a]^2+[y(t)-b]^2-R^2.$$

Составляем уравнения (174) и (174′), ограничиваясь второй производной, т. е. требуя касание 2-го порядка. Получаем [обозначая $x(t_0)$, $x'(t_0)$, $x''(t_0)$ через x_0, x_0', x_0'' и т. д.]

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi(t_0, a, b, R)=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2-R^2=0,\\
&\varphi'(t_0, a, b, R)=2\{x_0'(x_0-a)+y_0'(y_0-b)\}=0,\\
&\varphi''(t_0, a, b, R)=2\{x_0''(x_0-a)+y_0''(y_0-b)+x_0'^2+y_0'^2\}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{178}$$

Таковы три уравнения, необходимые и достаточные для того, чтобы окружность с центром (a, b) и радиусом R имела в точке t_0 с нашей кривой касание 2-го порядка, т. е. была соприкасающейся окружностью. Умножим второе из уравнений на y_0'', третье на y_0' и вычтем почленно третье из второго (отбросив множитель 2). Получим

$$(y_0''x_0'-x_0''y_0')(x_0-a)-y_0'(x_0'^2+y_0'^2)=0,$$

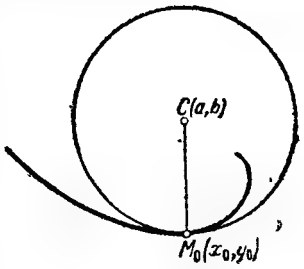
откуда

$$a-x_0=y_0'\frac{x_0'^2+y_0'^2}{x_0''y_0'-y_0''x_0'},$$

и совершенно аналогично

$$b-y_0=x_0'\frac{x_0'^2+y_0'^2}{y_0''x_0'-x_0''y_0'}.$$ (179)

Формулы эти совершенно симметричны относительно координатных осей; нужно только иметь в виду, что именно поэтому знаменатели у них отличаются знаком. Значение этих формул в том, что они указывают координаты a, b центра соприкасающейся окружности (черт. 39).



Черт. 39.

Центр соприкасающейся окружности называется центром кривизны кривой в данной точке $t=t_0$. Как мы видим, его координаты выражаются через координаты x_0, y_0 данной точки кривой $x(t)$, $y(t)$ и через их первые и вторые производные по параметру (тоже в данной точке). Каждой точке кривой отвечают своя соприкасающаяся окружность и свой центр кривизны.

Теперь по первому из уравнений (178) легко найти R^2:

$$R^2=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=y_0'^2\left(\frac{x_0'^2+y_0'^2}{x_0''y_0'-y_0''x_0'}\right)^2+x_0'^2\left(\frac{x_0'^2+y_0'^2}{y_0''x_0'-x_0''y_0'}\right)^2=$$

$$=\frac{(x_0'^2+y_0'^2)^3}{(x_0''y_0'-y_0''x_0')^2}.$$

Отсюда, извлекая квадратный корень, получим, считая R всегда положительным,

$$R=\frac{\sqrt{(x_0'^2+y_0'^2)^3}}{|x_0''y_0'-y_0''x_0'|}.$$ (180)

Вычисленный нами таким образом *радиус соприкасающейся окружности называется радиусом кривизны кривой в данной точке* $t=t_0$.

Мы видим, что *в каждой точке кривой* $x(t)$, $y(t)$ *существует и при этом единственным образом определенная окружность, имеющая с кривой в этой точке касание 2-го порядка (соприкасающаяся).*

Исключение составляют те точки, где знаменатель выражений (179) и (180) обращается в нуль:

$$x_0''y_0'-y_0''x_0'=0,$$ (180′)

и где радиус кривизны обращается в бесконечность. Здесь, строго говоря, соприкасающейся окружности не существует. Легко видеть, что́ происходит в этом случае. Действительно, при выполнении условия (176′) касательная имеет с кривой касание не 1-го порядка, как обычно, а 2-го, и заменяет в этом смысле соприкасающуюся окружность. Можно считать, что здесь мы имеем предельный случай соприкасающейся окружности — бесконечно большого радиуса, когда она превращается в прямую (касательную). Особенно наглядным это становится, если двигаться по кривой $x(t)$, $y(t)$, стремясь в точку t_0, где соблюдается условие (176′). Тогда радиус соприкасающейся окружности неограниченно растет, окружность распрямляется, стремясь к касательной в точке t_0 как к своему предельному положению.

Имеет смысл переписать еще формулы (179) и (180) в том частном случае, когда уравнение кривой имеет вид

$$y = y(x),$$

т. е. роль параметра t играет абсцисса x. Тогда

$$x' = 1, \quad x'' = 0$$

(штрих означает диференцирование по x) и (179), (180) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} a - x_0 &= -y_0' \frac{1 + y_0'^2}{y_0''}, \\ b - y_0 &= \frac{1 + y_0'^2}{y_0''}, \\ R &= \frac{(1 + y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y_0''|}. \end{aligned}\right\} \tag{181}$$

В формулах (179), (180), (181) мы больше не будем писать нуль при x и y, так как точка была произвольно фиксирована на кривой и полученные формулы справедливы для любой точки. Сделаем еще замечание относительно черт. 39. Так как мы можем гарантировать касание кривой с окружностью лишь 2-го порядка, т. е. четного, и за исключением отдельных точек это будет *точный* порядок касания, то, вообще говоря, соприкасающаяся окружность переходит в точке касания с одной стороны кривой на другую.

Примеры и упражнения.

1. *Центр кривизны в полярных координатах.* Пусть уравнение кривой имеет вид (33) и оси X, Y выбраны как на черт. 13, т. е. ось X проходит через рассматриваемую точку M на кривой. Если угол φ отсчитывается от OX, принятой за полярную ось, то имеет место параметрическое представление (34). Диференцируем по φ:

$$x' = r' \cos\varphi - r \sin\varphi, \quad x'' = r'' \cos\varphi - 2r' \sin\varphi - r \cos\varphi,$$
$$y' = r' \sin\varphi + r \cos\varphi, \quad y'' = r'' \sin\varphi + 2r' \cos\varphi - r \sin\varphi.$$

Так как в точке M мы имеем $\varphi = 0$, то

$$x' = r', \qquad x'' = r'' - r,$$
$$y' = r, \qquad y'' = 2r'.$$

Находим координаты центра кривизны C по (179):

$$a = r\frac{r^2 + r'^2}{r''r - r^2 - 2r'^2} + r = r\frac{r''r - r'^2}{r''r - r^2 - 2r'^2},$$

$$b = r'\frac{r^2 + r'^2}{r^2 + 2r'^2 - r''r}$$

(так как в точке M $x = r$, $y = 0$). Отсюда легко вычислить радиус кривизны R:

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2 + 2r'^2 - r''r|}.$$

Центр кривизны C будет расположен где то на нормали MN (черт. 13) Найдем отношение, в котором он делит отрезок NM:

$$\frac{NC}{CM} = \frac{x_C - x_N}{x_M - x_C} = \frac{a - 0}{r - a} = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} = \left(\operatorname{arctg}\frac{r}{r'}\right)'.$$

Сравнивая с (35), мы получаем

$$\frac{NC}{CM} = \frac{d\mu}{d\varphi}.$$

Формулы для R и $\frac{NC}{CM}$ остаются, очевидно, верными, если выбрать полярную ось как угодно, а не обязательно проходящей через исследуемую точку M (ср. § 5).

2. *Синус-спирали.* Так называются кривые, для всех точек которых *отношение* $\frac{NC}{CM}$ *остается постоянным.*

Запишем это условие:

$$\frac{NC}{CM} = \lambda = \text{const}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{d\mu}{d\varphi} = \lambda.$$

Отсюда

$$\mu = \lambda\varphi + \mu_0.$$

Следовательно, синус-спирали можно характеризовать и тем, что вдоль них μ *есть линейная функция* φ, *т. е. угол наклона касательной к неподвижной полярной оси (этот угол равен* $\varphi + \mu$) *получает приращения, пропорциональные приращениям полярного угла* φ (с коэфициентом пропорциональности $1 + \lambda$).

Найдем уравнения синус-спиралей в конечном виде в случае $\lambda \neq 0$. Поворотом полярной оси можно добиться обращения μ_0 в $\frac{\pi}{2}$, так что

$$\mu = \lambda\varphi + \frac{\pi}{2}.$$

Пользуясь формулой (35), получаем

$$r\frac{d\varphi}{dr} = \operatorname{tg}\left(\lambda\varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{т. е.} \quad \frac{dr}{r} = \frac{-\sin\lambda\varphi}{\cos\lambda\varphi}\,d\varphi.$$

Интегрируем почленно:

$$\ln r = \frac{1}{\lambda}\ln\cos\lambda\varphi + C, \quad \text{т. е.} \quad r = r_0(\cos\lambda\varphi)^{\frac{1}{\lambda}},$$

где

$$r_0 = e^C.$$

Составить себе представление о форме главной ветви синус-спирали, т. е. той ее части, для которой

$$-\frac{\pi}{2\lambda} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2\lambda}$$

и, следовательно, $\cos\lambda\varphi \geqslant 0$.

Остальные части синус-спирали по форме повторяют главную ветвь.

Доказать следующие результаты:

В случае $\lambda > 0$ главная ветвь начинается в полюсе, где касается направления $\varphi = -\frac{\pi}{2\lambda}$, максимально удаляется от полюса на расстояние r_0 при $\varphi = 0$ и снова возвращается в полюс при $\varphi = \frac{\pi}{2\lambda}$, касаясь этого направления.

В случае $\lambda < 0$ главная ветвь при $\varphi = -\frac{\pi}{2\lambda}$ и $\varphi = \frac{\pi}{2\lambda}$ уходит в бесконечность; наиболее приближается к полюсу при $\varphi = 0$, когда $r = r_0$.

Показать, что в случаях

$$\lambda = 1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ -2$$

мы получаем соответственно *окружность, кардиоиду* (см. § 7), *лемнискату* (одну ветвь)[1], *прямую линию, параболу, равнобочную гиперболу* (*одну ветвь*).

Выяснить расположение полюса и полярной оси относительно каждой из этих линий, формулировать для каждой из них теорему о том, что $\frac{NC}{CM} = \lambda$, и выяснить соответственно расположение центра кривизны C относительно отрезка MN.

В случае $\lambda = 0$ основное соотношение дает $\frac{d\mu}{d\varphi} = 0$; показать, что синус-спираль в этом случае тождественна с логарифмической спиралью. Центр кривизны C попадает в точку N.

3. *Кривые Рибокура.* Так называются кривые, центр кривизны которых C делит в постоянном отношении λ отрезок нормали NM от оси X до точки касания (черт. 7).

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x) > 0$. Тогда, пользуясь формулами (181), получим

$$\frac{NC}{CM} = \frac{y_N - y_C}{y_C - y_M} = \frac{0 - b}{b - y_M} = \frac{-y - \frac{1+y'^2}{y''}}{\frac{1+y'^2}{y''}} = -\frac{yy''}{1+y'^2} - 1,$$

откуда

$$-\frac{yy''}{1+y'^2} = 1 + \lambda, \quad \text{т. е.} \quad -\frac{y'y''}{1+y'^2} = (1+\lambda)\frac{y'}{y}.$$

---

[1]) Лемниската — кривая, для точек которой произведение расстояний от двух данных точек F_1, F_2 (фокусов) постоянно и равно $\frac{1}{4}\overline{F_1F_2}^2$. Кривая эта имеет вид восьмерки.

Интегрируем почленно (считая $1+\lambda \neq 0$):

$$-\frac{1}{2}\ln(1+y'^2) = (1+\lambda)\ln y + C_1,$$

т. е.

$$1+y'^2 = (Cy)^{-2(1+\lambda)}, \text{ где } C = e^{\frac{C_1}{1+\lambda}} > 0.$$

Отыскание кривой Рибокура в конечном виде сводится, таким образом, к квадратурам, именно

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{(Cy)^{-2(1+\lambda)} - 1}}.$$

В случае $1+\lambda < 0$ ордината меняется от наименьшего возможного значения $y = \frac{1}{C}$, до $+\infty$, в случае $1+\lambda > 0$ — от нуля до наибольшего значения $y = \frac{1}{C}$, причем x монотонно растет в обоих случаях (если в знаменателе брать корень со знаком $+$). Получаем главную ветвь кривой Рибокура.

Выполнить интегрирование в частных случаях

$$\lambda = 0, \quad -2, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{3}{2}$$

и показать, что кривая будет представлять соответственно *окружность*, *цепную линию* ($y = \frac{1}{2C}[e^{xC} + e^{-xC}]$), *циклоиду* (см. § 7), *параболу*.

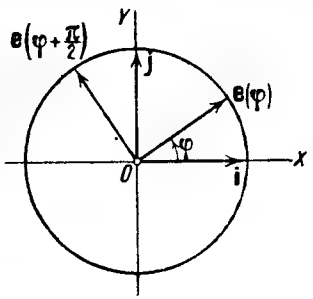
Выяснить расположение этих кривых относительно оси X и расположение центра кривизны C относительно отрезка MN в каждом случае.

§ 18. Соприкасающаяся окружность с векторной точки зрения.

В теории не только плоских, но и пространственных кривых нам будет полезна одна *элементарная лемма, относящаяся к окружности.*

Рассмотрим (черт. 40) единичный вектор в плоскости XY, направленный под углом φ к оси X. Такой вектор мы будем обозначать через $\mathbf{e}(\varphi)$. Очевидно, его проекции (координаты) по осям X, Y будут соответственно $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, так что его разложение имеет вид

$$\mathbf{e}(\varphi) = \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi. \qquad (182)$$



Черт. 40.

Меняя φ, мы можем рассматривать $\mathbf{e}(\varphi)$ (который будет при этом вращаться) как вектор-функцию от φ. Если $\mathbf{e}(\varphi)$ откладывать из начала O, то конец его описывает окружность радиуса единица.

Вычислим производную $\mathbf{e}(\varphi)$ по φ. Получим

$$\mathbf{e}'(\varphi) = -\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi = \mathbf{i}\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) + \mathbf{j}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right).$$

Как мы видим, получается вновь единичный вектор, но направленный к оси X под углом $\varphi+\frac{\pi}{2}$. Итак,

$$\mathbf{e}'(\varphi)=\mathbf{e}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right). \tag{182'}$$

Заметим, что перпендикулярность $\mathbf{e}'(\varphi)$ к $\mathbf{e}(\varphi)$ ясна также и из того, что $\mathbf{e}'(\varphi)$ должен быть касательным вектором к окружности, описываемой концом радиуса вектора $\mathbf{e}(\varphi)$.

Возьмем теперь окружность произвольного радиуса R, примем ее центр O за начало координат, а ее плоскость — за плоскость XY (черт. 41). Отнесем ее к длине дуги s как к параметру, причем дугу s будем откладывать от точки M_0, где окружность встречается с положительным направлением оси X. Тогда значение s для любой точки M равно, очевидно, полярному углу этой точки, умноженному на радиус R:

$$s=R\varphi;\quad \varphi=\frac{s}{R}.$$

Радиус-вектор $\mathbf{r}=\overline{OM}$ точки M равен единичному вектору $\mathbf{e}(\varphi)$ в направлении $\overline{OM}$, умноженному на длину OM, т. е. R:

$$\mathbf{r}=R\,\mathbf{e}\left(\frac{s}{R}\right). \tag{183}$$

Это уравнение мы можем рассматривать как параметрическое представление нашей окружности в векторной форме; параметром служит дуга s.

Диференцируя радиус-вектор (183) по s, получим

$$\dot{\mathbf{r}}=R\,\mathbf{e}'\left(\frac{s}{R}\right)\frac{1}{R},$$

где $\mathbf{e}'\left(\frac{s}{R}\right)$ означает производную по углу $\varphi=\frac{s}{R}$, а $\frac{1}{R}$ есть производная φ по s. Пользуясь формулой (182'), получаем окончательно

$$\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{e}\left(\frac{s}{R}+\frac{\pi}{2}\right). \tag{183'}$$

Как и следовало ожидать, производная от радиуса-вектора по дуге оказалась единичным вектором, направленным под углом $\varphi+\frac{\pi}{2}$, т. е. по касательной к окружности в точке M (черт. 41).

Еще раз диференцируем по s; получим

$$\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{e}'\left(\frac{s}{R}+\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{R}.$$

Снова штрих означает диференцирование по углу $\frac{s}{R}+\frac{\pi}{2}$. Пользуемся формулой (182') еще раз; тогда можно написать

$$\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{e}\left(\frac{s}{R}+\pi\right)\frac{1}{R}.$$

Так как добавление π к углу φ означает поворот вектора на 180°, то

$$\mathbf{e}\left(\frac{s}{R}+\pi\right)=-\mathbf{e}\left(\frac{s}{R}\right)$$

и, следовательно,

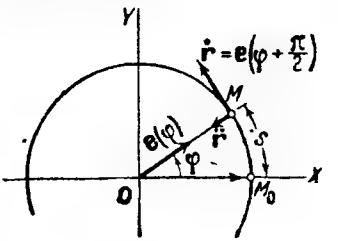
$$\ddot{\mathbf{r}}=-\frac{1}{R}\mathbf{e}\left(\frac{s}{R}\right). \qquad (183'')$$

Вторая производная $\mathbf{r}$ по дуге s есть, таким образом, вектор, обратный $\mathbf{r}$ и по направлению и по модулю.

Пусть теперь нам известны точка M на окружности и значения производных $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$ в этой точке. Тогда легко построить и самую окружность.

Действительно, из (183″) следует (так как вектор $\mathbf{e}\left(\frac{s}{R}\right)$ единичный), что

$$|\ddot{\mathbf{r}}|=\frac{1}{R}, \quad R=\frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}|}. \qquad (184)$$



Черт. 41.

Итак, радиус окружности найден. Теперь легко найти и ее центр. Для этого достаточно построить вектор $\overline{MO}$, переводящий из данной точки M в центр окружности. Так как $\overline{MO}=-\mathbf{r}$, то, пользуясь (183) и (183″), получим

$$\overline{MO}=-\mathbf{r}=-R\,\mathbf{e}\left(\frac{s}{R}\right)=R^2\ddot{\mathbf{r}},$$

или

$$\overline{MO}=\frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\ddot{\mathbf{r}}|^2}. \qquad (185)$$

Центр O искомой окружности построен. Наконец, плоскость окружности вполне определится, так как она проходит через точки O и M и содержит в себе кроме того касательный вектор $\dot{\mathbf{r}}$ в точке M, также нам известный.

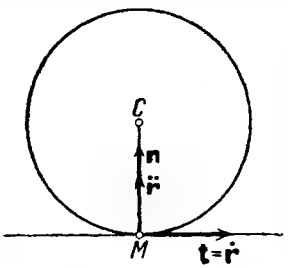
Итак, *окружность всегда можно восстановить, зная M, $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$.* В этом и заключается лемма. Сюда нужно сделать некоторые добавления. У нас за начало координат был принят центр окружности. Если перенести начало координат в *любую точку пространства* с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$, то радиусы-векторы $\mathbf{r}$ у всех точек заменятся на $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$, т. е. изменятся на постоянный вектор. Производные от них по s не изменятся вовсе. Равным образом, не играет роли для производных от $\mathbf{r}$ по s и выбор точки отсчета s. Поэтому формулы (184) и (185) верны для любой окружности в пространстве при любом выборе начала координат (конечно, в формуле (185) под O нужно понимать попрежнему центр окружности, а не измененное начало координат).

Доказанную лемму мы сейчас используем для отыскания центров и радиусов кривизны плоских кривых. Прежде всего, если данная кривая есть окружность, то соприкасающейся окружностью в любой ее точке будет она сама, и, следовательно, центр и радиус кривизны совпадают с центром и радиусом самой окружности. Тогда можно считать, что формулы (184) и (185) позволяют *найти центр и радиус кривизны, если известна точка M и значения* $\dot{\mathbf{r}}$ *и* $\ddot{\mathbf{r}}$ *в ней* (черт. 42).

Пусть теперь дана *произвольная* плоская кривая векторным уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$$

и пусть в некоторой ее точке M построена соприкасающаяся с ней окружность (не вырождающаяся в прямую). Согласно (164) для касания 2-го порядка необходимо (после согласования отсчета) и достаточно совпадение первой и второй производных от $\mathbf{r}$ по s вдоль двух кривых в их общей точке. В нашем случае производные $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$, взятые в точке M вдоль кривой, имеют те же значения и для соприкасающейся окружности. Отсюда, пользуясь формулами (184) и (185), легко найти радиус R и центр C соприкасающейся окружности. А именно,



Черт. 42.

$$R = \frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}|}, \quad \overline{MC} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\ddot{\mathbf{r}}|^2}, \qquad (186)$$

где $\overline{MC}$ — вектор, соединяющий точку касания с центром C соприкасающейся окружности. *Таковы основные формулы, позволяющие векторным путем указать центр и радиус кривизны кривой* $\mathbf{r}(s)$ *в данной точке M.* Под $\dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}}$ мы понимаем производные от $\mathbf{r}$ по s в данной точке вдоль кривой (совпадающие с соответствующими производными в той же точке вдоль соприкасающейся окружности).

Уясним себе *геометрический смысл построения* (черт. 42). Как мы знаем (§ 15), $\dot{\mathbf{r}}$ есть всегда *единичный* касательный вектор (общий в нашем случае кривой и окружности).

Далее, *вектор* $\overline{MC}$, будучи направлен в центр окружности, перпендикулярен касательному вектору $\dot{\mathbf{r}}$ и лежит, следовательно, *на нормали к кривой.* В ту же самую сторону по нормали направлен и вектор $\ddot{\mathbf{r}}$, так как он отличается от $\overline{MC}$ положительным численным множителем $|\ddot{\mathbf{r}}|^2$. *То направление на нормали, в котором расположен центр кривизны C, мы будем принимать за положительное.* Положительное направление на нормали легко себе представить наглядно, если учесть, что центр кривизны и соприкасающаяся окружность вместе с ним расположены от касательной в сторону, отвечающую положительному

направлению на нормали. Но соприкасающаяся окружность расположится обязательно по ту же сторону общей касательной, что и сама данная кривая *вблизи точки касания*, так как при уклонении от касательной главную роль играют бесконечно малые 2-го порядка, а с этой степенью точности кривая совпадает со своей соприкасающейся окружностью. Итак, наглядно положительное направление на нормали есть то, куда уклоняется от своей касательной кривая вблизи данной точки.

Заметим, что направленность $\ddot{\mathbf{r}}$ по нормали легко обнаружить и более непосредственным путем. Запишем, что скалярный квадрат $\dot{\mathbf{r}}$, как единичного вектора, равен единице:

$$\dot{\mathbf{r}}\,\dot{\mathbf{r}} = 1. \tag{187}$$

Диференцируем по s это равенство по правилам диференцирования скалярного произведения. Получим

$$\ddot{\mathbf{r}}\,\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}}\,\ddot{\mathbf{r}} = 0,$$

или

$$2\ddot{\mathbf{r}}\,\dot{\mathbf{r}} = 0, \tag{187'}$$

откуда видно, что $\ddot{\mathbf{r}}$ перпендикулярен касательному вектору $\dot{\mathbf{r}}$ и направлен, следовательно, по нормали.

При изучении плоских, а особенно пространственных кривых является весьма целесообразным *связать с кривой в каждой ее точке нечто вроде местной координатной системы* (*трехгранник Френе*). Поскольку мы сейчас находимся в плоскости, речь будет итти о сопоставлении каждой точке кривой двух единичных взаимно ортогональных векторов. Один из них — единичный касательный вектор $\dot{\mathbf{r}}$, который мы будем обозначать в дальнейшем через $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \tag{188}$$

Введем, кроме того, единичный вектор $\mathbf{n}$, направленный в положительную сторону по нормали. Через него удобно записываются ранее введенные векторы $\overline{MC}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$, имеющие то же направление. Каждый из них равен своему модулю, умноженному на единичный вектор того же направления, т. е. на $\mathbf{n}$. Но модуль $\overline{MC}$ равен R, так как MC — радиус соприкасающейся окружности, а модуль $\ddot{\mathbf{r}}$ есть $\frac{1}{R}$, как показывает (186). Следовательно,

$$\overline{MC} = R\mathbf{n}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{R}\mathbf{n}. \tag{189}$$

Эти формулы вполне равносильны формулам (186), если учитывать что вектор $\mathbf{n}$ единичный.

В заключение интересно *сопоставить формулы* (186), *определяющие радиус и центр кривизны кривой* $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$, *с аналогичными формулами* (179) *и* (180) *для кривой* $x=x(t)$, $y=y(t)$.

Перепишем формулы (186), пользуясь координатным представлением кривой

$$\mathbf{r}(s)=x(s)\mathbf{i}+y(s)\mathbf{j}.$$

Диференцируя по s, получаем

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}&=\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j},\\ \ddot{\mathbf{r}}&=\ddot{x}\mathbf{i}+\ddot{y}\mathbf{j}.\end{aligned}\right\} \tag{190}$$

Отсюда по известной формуле для модуля вектора

$$|\ddot{\mathbf{r}}|=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}.$$

Вставляем эти результаты в (186):

$$R=\frac{1}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}}, \tag{190'}$$

$$\overline{MC}=\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}\,\mathbf{i}+\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}\,\mathbf{j}.$$

Так как вектор $\overline{MC}$ соединяет точку кривой $M(x, y)$ с ее центром кривизны $C(a, b)$, то координаты этого вектора суть разности координат точек C и M, т. е.

$$\left.\begin{aligned}a-x&=\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2},\\ b-x&=\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}.\end{aligned}\right\} \tag{190''}$$

Так выглядят формулы (186) в координатном представлении.

Теперь, с другой стороны, выпишем формулы (179) и (180) в том частном случае, когда за параметр t принята дуга s. Получим

$$\left.\begin{aligned}a-x&=\dot{y}\,\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{y}\dot{x}},\\ b-y&=\dot{x}\,\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\ddot{y}\dot{x}-\dot{x}\ddot{y}},\end{aligned}\right\}\qquad R=\frac{\sqrt{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^3}}{|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{y}\dot{x}|}. \tag{191}$$

Можно подумать, что формулы (190′) и (190″) дают другой результат, чем формулы (191). Но разница только кажущаяся, так как $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ связаны между собой зависимостями. А именно, так как $\dot{\mathbf{r}}$—вектор

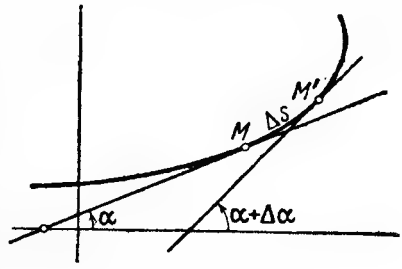
единичный и кроме того перпендикулярен к $\ddot{\mathbf{r}}$, то, пользуясь равенствами (190), можно записать

$$|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 1 \quad \text{и} \quad \dot{\mathbf{r}}\,\ddot{\mathbf{r}} = \dot{x}\,\ddot{x} + \dot{y}\,\ddot{y} = 0.$$

Пользуясь этими связями между $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, легко убедиться, что формулы (190′), (190″) и, с другой стороны, (191) дают одно и то же.

§ 19. Кривизна.

В этом параграфе мы займемся понятием кривизны плоской кривой. К этому понятию естественнее всего можно подойти, поставив себе целью дать численную оценку степени искривленности кривой в данной точке. Действительно, как видно на-глаз, различные кривые или одна и та же кривая в разных точках могут быть искривлены в большей или меньшей степени. Так, прямая линия совсем не имеет искривления, окружность большого радиуса имеет слабое искривление, а по мере уменьшения радиуса ее искривление растет. На черт. 43 искривленность кривой увеличивается при движении по ней слева направо. Все это, конечно, только наглядные соображения. Чтобы подойти к точному определению, заметим, что чем сильнее искривление кривой, тем быстрее меняет свое направление касательная к ней при переходе от точки к точке; так, прямая, являющаяся сама своей касательной, все время сохраняет постоянное направление. Поэтому за меру искривленности кривой в среднем на данном участке MM' можно принять угол поворота касательной, приходящийся в среднем на единицу пути, пройденного точкой касания. Другими словами, нужно угол $\Delta\alpha$, образованный касательными в точках M и M' (черт. 43), разделить на Δs — длину дуги $\overset{\frown}{MM'}$. Полученное частное



Черт. 43.

$$k_{ср} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s},$$

взятое по модулю, называется *средней кривизной* дуги MM'.

Отсюда же нетрудно перейти к понятию *кривизны в данной точке* M. Заставим точку M' стремиться по кривой в M. Тогда *предел*, к которому стремится средняя кривизна дуги MM', называется *кривизной кривой в точке* M. Мы будем обозначать кривизну через k.

Итак,

$$k = \lim_{M' \to M} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|. \tag{192}$$

Формулированное здесь определение кривизны законно, так как мы сейчас увидим, что предел, о котором идет речь, существует и является вполне определенным (при обычных наших предположениях). Предел берем по модулю, считая кривизну k величиной всегда положительной или в крайнем случае нулем.

Пусть кривая задана параметрическим представлением $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Займемся вычислением кривизны кривой в произвольной точке. Каждому значению t отвечают некоторая точка $M(t)$ на кривой, касательная в этой точке и угол $\alpha(t)$, образуемый касательной с положительным направлением оси X. Так как мы ограничиваемся заведомо обыкновенными точками, то $x'(t)$, $y'(t)$ не обращаются одновременно в нуль. Для определенности ограничимся *простым* отрезком кривой, где $x' \neq 0$, тогда касательная не параллельна оси Y, и ее угловой коэфициент равен

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad \text{откуда} \quad \alpha(t) = \operatorname{arctg} \frac{y'(t)}{x'(t)}. \tag{193}$$

Угол α задан здесь как функция t (хотя и неоднозначная; но мы выберем одну из ветвей arctg, какую безразлично, так как нам важна не сама функция $\alpha(t)$, а ее приращения, а они будут всегда одни и те же).

С другой стороны, длина дуги s, отсчитываемая от некоторой начальной точки до точки $M(t)$ по кривой, есть также функция от t:

$$s = s(t).$$

Перейдем из точки $M(t)$ в некоторую другую точку $M'(t+\Delta t)$, давая параметру t приращение Δt. Тогда функция $\alpha(t)$ примет новое значение $\alpha(t+\Delta t)$.

Очевидно, $\alpha(t+\Delta t)$ и $\alpha(t)$ суть углы, образуемые с положительным направлением оси X направлениями касательных соответственно в точках M' и M. Поэтому разность этих углов

$$\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)$$

есть угол поворота касательной при переходе из M в M'.

С другой стороны, $s(t+\Delta t)$ и $s(t)$ суть длины дуг, отсчитанных от некоторой начальной точки соответственно до точек M' и M. Разность этих дуг

$$s(t+\Delta t) - s(t)$$

выражает длину дуги от M до M'.

Поэтому средняя кривизна кривой на отрезке MM' выражается отношением

$$k_{\text{ср}} = \left| \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{s(t+\Delta t) - s(t)} \right|.$$

Рассмотрим поведение этой величины при Δt, стремящемся к нулю, т. е. при стремлении точки M' в M по кривой.

Если переписать предыдущее выражение в виде

$$k_{\text{ср}} = \left| \frac{\frac{\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)}{\Delta t}}{\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}} \right|,$$

то ясно, что при $\Delta t \to 0$ числитель и знаменатель стремятся к пределам, а именно к производным $\alpha'(t)$ и $s'(t)$, следовательно, предел этого выражения (т. е. кривизна в точке) существует и выражается так:

$$k = \left| \frac{\alpha'(t)}{s'(t)} \right|. \tag{194}$$

Остается закончить вычисление. Находим $\alpha'(t)$, диференцируя (193):

$$\alpha'(t) = \frac{\frac{y''(t)\,x'(t) - x''(t)\,y'(t)}{x'(t)^2}}{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} = \frac{y''x' - x''y'}{x'^2+y'^2}.$$

Что же касается $s'(t)$, то пользуемся формулой (159), учитывая, конечно, что у нас $z \equiv 0$:

$$s'(t) = \sqrt{x'^2+y'^2}.$$

Вставляя в (194), получаем окончательно

$$k = \frac{|y''x' - x''y'|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{195}$$

Мы вывели эту формулу в допущении, что вблизи рассматриваемой точки M $x'(t) \neq 0$. Но ввиду ее полной симметрии относительно x, y, она будет иметь тот же вид и при допущении $y'(t) \neq 0$, т. е. она имеет место в любой заведомо обыкновенной точке.

Сравнивая полученное выражение кривизны k с формулой (180) для радиуса кривизны, мы приходим к важному соотношению

$$k = \frac{1}{R}. \tag{196}$$

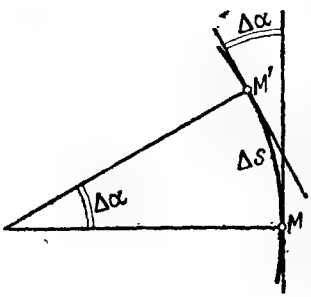
Кривизна и радиус кривизны — величины взаимно обратные.

Это соотношение, выведенное вычислением, интересно пояснить геометрически. Заметим прежде всего, что для *окружности* вычислить кривизну особенно просто. В этом случае (черт. 44) угол между касательными в точках M и M' равен центральному углу $\Delta\alpha$ между радиусами OM и OM', проведенными в точки касания. Соответствующая длина дуги $\overset{\smile}{MM'} = \Delta s$ равна центральному углу $\Delta\alpha$, умноженному на радиус окружности R, так что $\Delta s = R\,\Delta\alpha$ и, следовательно, $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{1}{R}$.

Средняя кривизна *любой дуги окружности* равна обратной величине радиуса окружности. Ясно отсюда, что кривизна *в любой точке окруж-*

ности также равна $\frac{1}{R}$ и остается, таким образом, постоянной от точки к точке.

Установив это, заметим, что из самого определения кривизны k (теперь уже для любой кривой) видно, что для ее вычисления достаточно знать производные текущих координат x, y по дуге s лишь 1-го и 2-го порядков (одно диференцирование при вычислении α и еще одно при отыскании $\lim \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$). Но так как кривая имеет с соприкасающейся окружностью касание 2-го порядка, то значения этих производных у них будут общими, а значит, будет общим и значение кривизны. Итак, *кривизна произвольной кривой равна в данной точке кривизне соприкасающейся окружности, а кривизна окружности совпадает с обратной величиной ее радиуса, т. е. в нашем случае — радиуса кривизны.* Так, мы вновь пришли к соотношению (196) из соображений геометрически более наглядных, хотя не доведенных нами до полной строгости.



Черт. 44.

Сопоставим еще признак (176′) для точек распрямления (касание кривой с ее касательной имеет порядок выше 1-го) с формулой (195). Тогда этот признак можно переписать в виде

$$k = 0. \qquad (196')$$

Следовательно, к точкам с кривизной нуль принадлежат, прежде всего, все точки перегиба.

§ 20. Формулы Френе.

До сих пор мы рассматривали построения, связанные с соприкасающейся окружностью в одной данной точке. Теперь нас будет интересовать характер изменения всей картины при смещении точки касания вдоль кривой. Изучим прежде всего, как будут меняться векторы $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$ (см. § 18). Представляя себе кривую отнесенной к параметру s:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s),$$

мы сопоставляем каждому значению s точку кривой и, следовательно, значения k, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ в этой точке. Таким образом k, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ мы рассматриваем вдоль кривой тоже как функции параметра s:

$$k = k(s), \quad \mathbf{t} = \mathbf{t}(s), \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}(s).$$

Относительно природы этих функций нужно заметить следующее.

Так как $k = \frac{1}{R}$, то из формулы (186) получаем

$$k = |\ddot{\mathbf{r}}(s)|. \tag{197}$$

Очевидно, что при наших предположениях относительно $\mathbf{r}(s)$ кривизна k, в точках, где она отлична от нуля, будет тоже однозначной и диференцируемой нужное число раз функцией от s. То же самое относится и к вектору $\mathbf{t}$, равному $\dot{\mathbf{r}}(s)$. Несколько сложнее обстоит дело с вектором $\mathbf{n}$, который представляет собой единичный вектор, направленный в положительную сторону нормали, т. е. в направлении $\ddot{\mathbf{r}}$. Когда мы проходим через точки, где $k = 0$, вектор $\ddot{\mathbf{r}}$, тоже проходя через значение нуль (как видно из (197)), может изменить направление на обратное, вследствие чего $\mathbf{n}$ тоже меняет направление на обратное, меняясь скачком (см. черт. 47). Поэтому мы ограничиваемся участками кривой, на которых k нигде не обращается в нуль, и следовательно, функции

$$R(s) = \frac{1}{k(s)} \quad \text{и} \quad \mathbf{n}(s) = R(s)\ddot{\mathbf{r}}(s)$$

удовлетворяют нашим обычным предположениям.

Диференцируя по s вектор $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}$, получим $\dot{\mathbf{t}} = \ddot{\mathbf{r}}$ и, сопоставляя с (189), имеем $\dot{\mathbf{t}} = \frac{1}{R}\mathbf{n}$, или

$$\dot{\mathbf{t}} = k\mathbf{n}. \tag{198}$$

Аналогично формуле (198), можно выразить производную по дуге и от вектора $\mathbf{n}$. Запишем, что скалярный квадрат $\mathbf{n}$, как единичного вектора, равен единице:

$$\mathbf{nn} = 1.$$

Диференцируя по s, получим

$$2\dot{\mathbf{n}}\mathbf{n} = 0.$$

Следовательно, $\dot{\mathbf{n}}$ перпендикулярно $\mathbf{n}$, а так как $\dot{\mathbf{n}}$ направлено по нормали, то $\dot{\mathbf{n}}$ направлено по касательной и поэтому может отличаться от вектора $\mathbf{t}$ только численным множителем:

$$\dot{\mathbf{n}} = \alpha\mathbf{t},$$

где α — пока неопределенный множитель. Его нетрудно определить, записав, что скалярное произведение $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$ в силу их перпендикулярности равно нулю:

$$\mathbf{tn} = 0,$$

и продиференцировав это равенство по s. Получим

$$\dot{\mathbf{t}}\mathbf{n} + \mathbf{t}\dot{\mathbf{n}} = 0.$$

Вставляя сюда $k\mathbf{n}$ вместо $\dot{\mathbf{t}}$ и $\alpha\mathbf{t}$ вместо $\dot{\mathbf{n}}$ и учитывая, что

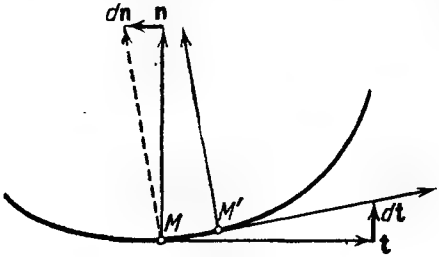
$$\mathbf{tt} = \mathbf{nn} = 1,$$

получим $k + \alpha = 0$, откуда $\alpha = -k$.

Выражение для $\dot{\mathbf{n}}$ принимает окончательный вид

$$\dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{t}. \tag{199}$$

Формулы (198) и (199) называются *формулами Френе (для плоской кривой)*. Как мы увидим, они будут играть большую роль, особенно в теории пространственных кривых, где они примут несколько усложненную форму. Уясним себе *геометрический смысл этих формул.* Они выражают прежде всего производные векторов $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ через сами эти векторы и через кривизну k в данной точке. Умножая (198) и (199) почленно на ds, мы получим слева диференциалы



Черт. 45.

$$d\mathbf{t} = k\mathbf{n}\,ds, \quad d\mathbf{n} = -k\mathbf{t}\,ds. \tag{200}$$

Таковы главные части приращений вектор-функций $\mathbf{t}(s)$ и $\mathbf{n}(s)$ при переходе от значения аргумента s к бесконечно близкому значению $s + ds$. Но геометрически фигура, образованная единичными взаимно ортогональными векторами $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$, может только повернуться как твердое тело (если не обращать внимания на точку приложения этих векторов). И действительно, легко показать, что формулы Френе с точностью 1-го порядка выражают поворот векторов $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$ при переходе по кривой из точки $M(s)$ в бесконечно близкую точку $M'(s + ds)$ на бесконечно малый угол, именно на $k\,ds$ (считая положительным направление вращения от $\mathbf{t}$ к $\mathbf{n}$) (черт. 45).

В самом деле, если повернуть векторы $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ на угол $k\,ds$, то их новые значения выразятся через старые, очевидно, таким образом:

$$\mathbf{t} + \Delta\mathbf{t} = \cos(k\,ds)\,\mathbf{t} + \sin(k\,ds)\,\mathbf{n},$$

$$\mathbf{n} + \Delta\mathbf{n} = \cos(k\,ds)\,\mathbf{n} - \sin(k\,ds)\,\mathbf{t}.$$

Но так как мы ведем рассмотрение с точностью 1-го порядка, т. е. пренебрегаем бесконечно малым 2-го и высшего порядков, то $\cos(k\,ds)$ можно заменить через 1, а $\sin(k\,ds)$ через $k\,ds$. Получим

$$\Delta\mathbf{t} = k\,ds\,\mathbf{n},$$

$$\Delta\mathbf{n} = -k\,ds\,\mathbf{t}.$$

Конечно, сохраняя лишь бесконечно малые первого порядка, мы получили здесь не точные приращения $\Delta\mathbf{t}$ и $\Delta\mathbf{n}$, а только их главные

части, т. е. дифференциалы. Мы вернулись, таким образом, к формулам (200).

Итак, (200) действительно выражают нам с точностью 1-го порядка поворот $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$ на угол kds; заметим, что этот угол пропорционален пути ds, пройденному по кривой от M до M', а коэфициентом пропорциональности служит кривизна k в точке M. Последнее естественно согласуется с самим определением кривизны.

§ 21. Эволюта.

Как было уже сказано, формулы Френе дают нам удобное орудие для того, чтобы следить за изменением $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$ вдоль кривой. Сохраняя предположения § 20 ($k \neq 0$), мы воспользуемся формулами Френе сейчас, переходя к более детальному изучению черт. 39 при переменной точке M. Прежде всего нужно изучить кривую, описываемую центром кривизны C.

Геометрическое место центров кривизны для всевозможных точек данной кривой называется ее эволютой.

Уравнение эволюты для кривой, заданной уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

у нас в сущности уже написано. А именно, достаточно переписать формулы (179), выражающие координаты a, b центра кривизны C, для любой точки $x(t)$, $y(t)$ данной кривой:

$$\left.\begin{aligned} a &= x(t) + y'(t)\,\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x''(t)\,y'(t) - y''(t)\,x'(t)}, \\ b &= y(t) + x'(t)\,\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{y''(t)\,x'(t) - x''(t)\,y'(t)}. \end{aligned}\right\} \qquad (201)$$

Уравнения (201) представляют собой параметрические уравнения эволюты данной кривой, так как выражают координаты центра кривизны как функции того же параметра t, к которому отнесена данная кривая. При изменении t точка $M(x, y)$ описывает исходную кривую, а точка $C(a, b)$ — ее эволюту, причем при каждом данном значении t точка C является центром кривизны исходной кривой в точке M.

При практическом отыскании эволюты обычно пользуются формулами (201) или их частным случаем, когда кривая задана уравнением $y = f(x)$. Но при исследовании общих свойств эволюты, к которому мы сейчас переходим, гораздо более уместно пользоваться векторной записью. А именно, предполагая, что исходная кривая задана уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s),$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор $\overline{OM}$ переменной точки M на кривой, мы нашли выражение (189) для вектора $\overline{MC}$, соединяющего точку M с ее центром кривизны C (черт. 42):

$$\overline{MC} = R\mathbf{n}.$$

Следовательно, радиус-вектор центра кривизны C, который мы будем обозначать через $\mathbf{p}$, можно выразить так:

$$\mathbf{p} = \overline{OC} = \overline{OM} + \overline{MC} = \mathbf{r}(s) + R(s)\,\mathbf{n}(s).$$

Мы пишем здесь $R(s)$ и $\mathbf{n}(s)$, чтобы подчеркнуть функциональную зависимость этих величин от параметра s, но в дальнейшем мы будем писать короче:

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{r} + R\mathbf{n}. \tag{202}$$

Уравнение (202) можно рассматривать при переменном s как параметрическое представление эволюты, радиус-вектор которой $\mathbf{p}$ выражен в функции параметра s. Следует помнить, однако, что вдоль эволюты параметр s уже не будет играть роли длины дуги.

Вычислим прежде всего дифференциал радиуса-вектора эволюты $\mathbf{p}$. Получаем

$$d\mathbf{p} = d\mathbf{r} + dR\,\mathbf{n} + R\,d\mathbf{n}.$$

Но, с одной стороны,

$$d\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}\,ds = \mathbf{t}\,ds;$$

с другой стороны, пользуясь второй из формул (200), запишем

$$R\,d\mathbf{n} = -Rk\mathbf{t}\,ds = -\mathbf{t}\,ds,$$

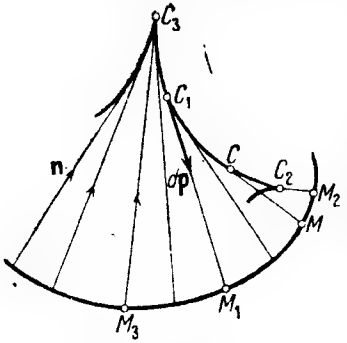
так как $Rk = 1$.

Таким образом, в выражении для $d\mathbf{p}$ первый и третий члены взаимно уничтожаются, и мы получаем

$$d\mathbf{p} = dR\,\mathbf{n}. \tag{203}$$

Из этой основной формулы мы выведем важные геометрические свойства эволюты.

Нам известно, что при каждом значении s радиус-вектор $\mathbf{r}(s)$ определяет некоторую точку M на исходной кривой, а $\mathbf{p}(s)$ — соответствующий центр кривизны (точку эволюты) C, лежащий на нормали к исходной кривой. Дифференциал радиуса-вектора эволюты $d\mathbf{p}$ направлен (как и для любой кривой) по касательной к эволюте в точке C. Но, с другой стороны, (203) показывает, что $d\mathbf{p}$ только скалярным множителем dR отличается от вектора $\mathbf{n}$ и направлен параллельно нормали MC. Следовательно, касательная к эволюте в точке C направлена параллельно нормали MC и тем самым с нею совпадает.



Черт. 46.

Итак, *нормали исходной кривой совпадают с касательными к эволюте в соответствующих точках.*

Чтобы вывести другое замечательное свойство эволюты, мы ограничимся таким участком исходной кривой, на котором *радиус кривизны* R

меняется монотонно. Будем пробегать этот участок на исходной кривой, а также соответствующий ему участок на эволюте в сторону возрастания R. (На черт. 46 — это участок от M до M_1 и от C до C_1.)

Возьмем обе части равенства (203) по модулю; учитывая, что $\mathbf{n}$ — единичный вектор, получим

$$|d\mathbf{p}| = |dR|.$$

Мы знаем [см. ($158''$)], что модуль дифференциала радиуса-вектора и модуль дифференциала дуги вдоль любой кривой совпадают. Обозначая через $d\sigma$ дифференциал дуги вдоль эволюты, предыдущее равенство можно переписать так:

$$|d\sigma| = |dR|.$$

Условимся на соответствующем участке эволюты (на чертеже от C до C_1) отсчитывать длину дуги σ в сторону возрастания R. Тогда R и σ растут одновременно, $d\sigma$ и dR имеют одинаковые знаки, так что предыдущее равенство влечет за собой

$$d\sigma = dR.$$

Интегрируя почленно, получим

$$\sigma = R + \text{const}.$$

Это означает, что приращения σ всегда равны соответствующим приращениям R. Пусть на черт. 46 мы перешли из точки M в точку M_1 и на эволюте — соответственно из C в C_1. Тогда приращение, испытанное σ, равно, очевидно, длине дуги эволюты $\overset{\smile}{CC_1}$, так что можно записать

$$\overset{\smile}{CC_1} = R_1 - R. \tag{204}$$

Здесь R_1 — радиус кривизны в точке M_1, а R — в точке M.

Таким образом *при монотонном изменении R на данном участке его приращение равно пути, пройденному центром кривизны по эволюте.* Любопытно отметить, что (204) означает равенство прямолинейного отрезка C_1M_1 и комбинированной линии C_1CM. Таким образом радиус кривизны $R_1 = C_1M_1$ получился как бы путем распрямления линии C_1CM путем „сматывания“ ее криволинейной части $\overset{\smile}{C_1C}$ с эволюты.

Мы имеем теперь достаточно ясное представление о том, что происходит на участках монотонного изменения радиуса кривизны $R(s)$. Нужно выяснить еще, как ведет себя эволюта в точках, где радиус кривизны исходной кривой переходит от возрастания к убыванию или от убывания к возрастанию, т. е. достигает максимума или минимума. В этих точках производная $\dot{R}(s)$ необходимо обращается в нуль, следовательно, dR также равно нулю и, как показывает (203),

$$d\mathbf{p} = 0, \quad \text{а значит,} \quad \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \dot{\mathbf{p}} = 0.$$

Обозначая через ξ, η текущие координаты по эволюте, т. е. координаты ее радиуса вектора $\mathbf{p}(s)$, можно записать

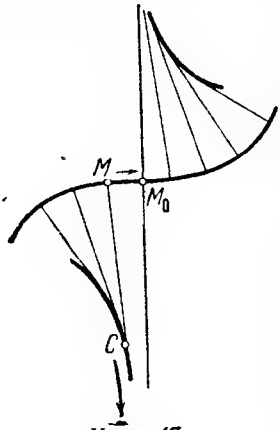
$$\mathbf{p}(s) = \xi(s)\,\mathbf{i} + \eta(s)\,\mathbf{j},$$

откуда

$$\dot{\mathbf{p}}(s) = \dot{\xi}(s)\,\mathbf{i} + \dot{\eta}(s)\,\mathbf{j}.$$

В точках экстремума радиуса кривизны R происходит обращение в нуль $\dot{\mathbf{p}}$, *а следовательно, и его обеих координат* $\dot{\xi}(s)$, $\dot{\eta}(s)$, *т. е. производных текущих координат по параметру. Это показывает, что на эволюте мы имеем здесь точку возврата* [1]).

На черт. 46 в точке M_2 кривая достигает максимального искривления, R достигает, следовательно, минимума M_2C_2 и центр кривизны C, описывая эволюту в положении C_2, наиболее приближается к исходной кривой. Эволюта образует заострение (точка возврата), обращенное к исходной кривой. Напротив, в точке M_3, где R достигает максимума, заострение эволюты обращено в обратную сторону от исходной кривой.



Черт. 47.

В самом начале § 20 мы ограничились участками исходной кривой, на которых кривизна k не обращается нигде в нуль. Теперь нам нужно хотя бы бегло уяснить себе поведение эволюты вблизи точки M_0 нулевой кривизны $k = 0$ на исходной кривой. Прежде всего самой этой точке не отвечает никакая точка на эволюте, так как R обращается в бесконечность. Когда же мы приближаемся по исходной кривой к точке нулевой кривизны с той или другой стороны, то $R = \frac{1}{k}$ бесконечно возрастает и центр кривизны C стремится по эволюте в бесконечность. Итак, по обе стороны точки нулевой кривизны эволюта образует уходящие в бесконечность ветви. Покажем, что нормаль в самой точке нулевой кривизны служит асимптотой для каждой из этих ветвей (черт. 47). В самом деле, когда точка M стремится в M_0 и точка C уходит по эволюте в бесконечность, касательная в C служит нормалью в M и стремится, следовательно, к предельному положению нормали в точке M_0.

В случае точки перегиба ветви эволюты уходят в бесконечность в разные стороны своей общей асимптоты (как изображено на чертеже). Но возможны и другие случаи обращения кривизны в нуль (именно, когда касание кривой со своей касательной имеет нечетный порядок выше первого), тогда обе ветви удаляются в одну и ту же сторону.

---

[1]) Если оставить в стороне исключительный случай $\dot{\xi}\,\dddot{\eta} - \dddot{\xi}\,\dot{\eta} = 0$, который означает, как легко подсчитать, что в данной точке обращается в нуль не только R, но и $\dot{R}$.

Другое определение эволюты.

Мы уже знаем, что эволюта в каждой своей точке C касается нормали к исходной кривой в соответствующей точке M и, следовательно, принадлежит к огибающей семейства нормалей исходной кривой. Покажем, что эволюта в точности совпадает с этой огибающей. Предполагая кривую заданной уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

запишем уравнение ее нормали

$$[X - x(t)]\, x'(t) + [Y - y(t)]\, y'(t) = 0, \tag{205}$$

где X, Y — текущие координаты.

При переменном t это уравнение определяет семейство всех нормалей к нашей кривой, причем t играет роль параметра семейства. Как мы знаем (§ 9), чтобы найти огибающую, нужно к уравнению семейства (205) присоединить еще одно, полученное диференцированием его по параметру семейства t. Получим

$$[X - x(t)]\, x''(t) + [Y - y(t)]\, y''(t) - x'(t)^2 - y'(t)^2 = 0. \tag{205'}$$

Решая эти уравнения относительно X, Y, мы получим координаты точки огибающей, выраженные в функции параметра t, т. е. параметрическое представление огибающей (особых точек на нормалях как на прямых не существует и дискриминантная кривая совпадает с огибающей).

Но легко заметить, что уравнения (205), (205′) (относительно X, Y) вполне эквивалентны двум последним уравнениям (178) (относительно a, b), так что текущие координаты X, Y по огибающей нормалей в точности совпадают с текущими координатами a, b эволюты.

Итак, *эволюту можно определить, как огибающую семейства нормалей исходной кривой.*

Упражнения.

1. Показать, что эволюта трактрисы (см. § 3, пример 4) есть цепная линия $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

2. Показать, что эволюта циклоиды есть та же циклоида, но параллельно смещенная; найти составляющие этого смещения по осям X и Y и относительное расположение кривых.

3. Показать, что для гипоциклоид (см. § 7) эволюта есть кривая, подобная исходной кривой и получаемая из нее поворотом около начала O на угол $\lambda\pi$ с последующим растяжением в постоянном отношении $\frac{1}{1-2\lambda}$ по всем лучам, выходящим из начала O. Показать, что для эпициклоид имеет место то же самое, только вместо растяжения будет сжатие в отношении $\frac{1}{1+2\lambda}$.

§ 22. Эвольвента.

Пусть дана какая-нибудь кривая, определяемая уравнением

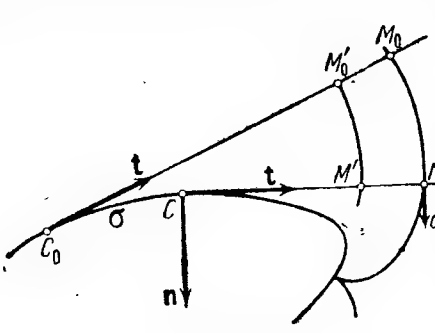
$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\sigma),$$

где $\mathbf{p}$ — радиус-вектор, а σ — длина дуги вдоль этой кривой, отсчитываемая от какой-нибудь начальной точки C_0 ($\sigma = 0$). На касательной в каждой точке выбираем положительное направление в сторону единичного касательного вектора $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{p}}{d\sigma}$. Откладывая по касательным отрезки, мы будем брать их длины со знаками $+$ или $-$, в зависимости от того, в положительном или отрицательном направлении от точки касания они отложены. Отложим прежде всего в начальной точке C_0 произвольный отрезок $\sigma_0 = C_0M_0$ (черт. 48). Переходя в любую точку C на кривой, мы строим в ней касательную, а на этой последней точку M, откладывая отрезок

$$CM = C_0M_0 - \overset{\frown}{C_0C}. \tag{206}$$

Отрезок CM укорочен по сравнению с C_0M_0 на путь $\overset{\frown}{C_0C}$, пройденный по кривой от точки отсчета C_0 до нашей точки C, т. е. на значение σ в точке C. Итак,

$$CM = \sigma_0 - \sigma. \tag{206'}$$



Черт. 48.

Мы, таким образом, как бы навертываем гибкий, но нерастяжимый отрезок C_0M_0 на кривую так, что навернутая часть $\overset{\frown}{C_0C}$ и остающаяся прямолинейной часть CM в сумме равны по длине C_0M_0.

Кривая, описываемая точкой M, когда C пробегает данную кривую, называется эвольвентой этой кривой.

Нетрудно записать параметрическое представление эвольвенты. Радиус-вектор точки M, который мы будем обозначать через $\mathbf{r}$, очевидно, выражается так:

$$\mathbf{r} = \overline{OM} = \overline{OC} + \overline{CM} = \mathbf{p}(\sigma) + \overline{CM}.$$

Что же касается вектора $\overline{CM}$, то он равен единичному касательному вектору $\mathbf{t}$, умноженному на длину отрезка CM с соответствующим знаком, т. е. на $\sigma_0 - \sigma$:

$$\overline{CM} = (\sigma_0 - \sigma)\,\mathbf{t}.$$

Отсюда

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}(\sigma) + (\sigma_0 - \sigma)\,\mathbf{t}(\sigma). \tag{207}$$

Таково уравнение эвольвенты, отнесенное к параметру σ, т. е. к длине дуги на исходной кривой. Так как начальный отрезок σ_0 выбирается произвольно и точку M_0 на начальной касательной можно взять где угодно, то эвольвенты (207) образуют целое семейство с параметром σ_0. Наглядно себе это можно представить так, что гибкая, но нерастяжимая нить C_0M_0 в натянутом состоянии постепенно навертывается на исходную кривую. Тогда каждая точка, отмеченная на этой нити, описывает одну из эвольвент исходной кривой.

Докажем основное свойство эвольвенты, именно, что *касательная к исходной кривой в каждой точке C является нормалью к эвольвенте в соответствующей ее точке M.* Действительно, дифференцируя (207), получим

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{p} - d\sigma\,\mathbf{t} + (\sigma_0 - \sigma)\,d\mathbf{t}.$$

Так как вектор $\mathbf{t}$ есть сокращенное обозначение производной $\frac{d\mathbf{p}}{d\sigma}$, то первые два слагаемых в правой части взаимно уничтожаются. Что же касается $d\mathbf{t}$, то согласно первой формуле Френе (198)

$$\frac{d\mathbf{t}}{d\sigma} = \dot{\mathbf{t}} = k\mathbf{n}.$$

Следовательно,

$$d\mathbf{r} = (\sigma_0 - \sigma)\,k\mathbf{n}\,d\sigma. \tag{208}$$

Здесь k — кривизна, $\mathbf{n}$ — единичная нормаль для исходной кривой. Как и для всякой кривой, $d\mathbf{r}$, дифференциал радиуса-вектора эвольвенты, направлен по касательной к эвольвенте и в то же время, отличаясь от $\mathbf{n}$ только скалярным множителем, параллелен $\mathbf{n}$. Следовательно, касательная к эвольвенте в точке M параллельна нормали в соответствующей точке C исходной кривой. Отсюда следует, что нормаль к эвольвенте в точке M параллельна касательной к исходной кривой в точке C, а так как обе прямые проходят через точку M, то они совпадают между собой. Итак, CM служит не только касательной в C, но и нормалью в M.

Таким образом каждая эвольвента исходной кривой пересекает под прямым углом все ее касательные (или, как говорят, эвольвенты являются ортогональными траекториями семейства касательных). При этом отрезок касательной MM' между двумя различными эвольвентами сохраняет постоянную длину (черт. 48). Действительно, если для данной эвольвенты начальный отрезок на касательной $C_0M_0 = \sigma_0$, а для другой эвольвенты он будет $C_0M_0' = \sigma_0'$, то на касательной в произвольной точке $C(\sigma)$ нам придется отложить соответственно отрезки $CM = \sigma_0 - \sigma$ и $CM' = \sigma_0' - \sigma$ [согласно (206′)]. Тогда отрезок касательной между этими двумя эвольвентами равен

$$MM' = CM' - CM = \sigma_0' - \sigma_0,$$

т. е. сохраняет постоянную длину от точки к точке (напомним, что на касательных у нас установлено положительное направление и длины отрезков берутся со знаками).

Выясним еще, что происходит с эвольвентой в точке $\sigma = \sigma_0$, т. е. в точке, где отрезок CM обращается в нуль и точка эвольвенты попадает на исходную кривую. В этой точке, как видно из (208),

$$d\mathbf{r} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} = 0.$$

Так как $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, где x, y — текущие координаты по эвольвенте, то это условие можно переписать в виде

$$\frac{dx}{d\sigma}\mathbf{i} + \frac{dy}{d\sigma}\mathbf{j} = 0,$$

что равносильно

$$\frac{dx}{d\sigma} = \frac{dy}{d\sigma} = 0.$$

Итак, в этой точке производные текущих координат эвольвенты по параметру обращаются в нуль и, значит, эвольвента имеет точку возврата (если оставить в стороне исключительный случай, когда добавочно

$$\frac{d^3x}{d\sigma^3}\frac{d^2y}{d\sigma^2} - \frac{d^3y}{d\sigma^3}\frac{d^2x}{d\sigma^2} = 0,$$

т. е. когда кривизна исходной кривой, как легко проверить, обращается в нуль). Это легко себе представить и наглядно, если учесть, что отрезок CM, проходя через нуль, меняет знак на обратный и начинает расти, откладываясь в обратном направлении (см. черт. 48).

Нетрудно, наконец, установить *связь между понятиями эволюты и эвольвенты*. Действительно, если мы построим для данной кривой эвольвенту, то нормали к эвольвенте, как мы выяснили, являются касательными к исходной кривой. *Исходная кривая будет*, таким образом, *огибающей нормалей, т. е. эволютой по отношению к своей эвольвенте.*

Обратно, если для данной кривой построена эволюта, то, разбивая данную кривую на участки монотонного изменения R и применяя свойство эволюты (204) (черт. 46), можем записать

$$CM = C_1M_1 - \overset{\frown}{C_1C}.$$

Считая точку C_1 фиксированной на эволюте, а C — переменной, мы видим, что *исходная кривая*, описываемая точкой M, *является эвольвентой для своей эволюты* (согласно определению эвольвенты).

§ 23. Натуральное уравнение кривой.

Задавая кривую ее уравнением, мы пользуемся той или иной координатной системой. Таким образом в записи уравнения отражается не только геометрическая форма кривой, но и выбор координатной си-

стемы; между тем этот выбор является фактором произвольным и в принципе никак не связан с самой кривой.

Возникает вопрос, нельзя ли характеризовать кривую уравнением, вид которого не связан с выбором координатной системы и отражает только геометрическую форму самой кривой. Как мы увидим, такое уравнение можно построить; оно будет называться *натуральным уравнением кривой.*

Предварительно уточним некоторые понятия. В этом параграфе под *кривой* мы будем понимать плоскую кривую, допускающую параметрическое представление

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad T_0 \leqslant t \leqslant T,$$

причем на кривой указано определенное направление в качестве положительного (кривая ориентирована). Как мы знаем (§ 15), в этом случае вдоль нашей кривой можно перейти к дуге s в качестве параметра:

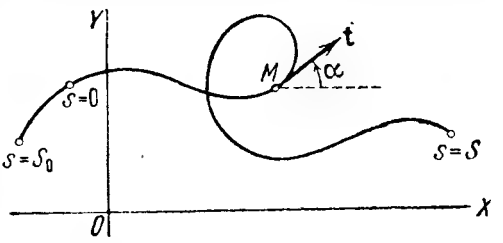
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j}, \quad S_0 \leqslant s \leqslant S.$$

Условимся при этом отсчитывать s в положительном направлении, связанном с данной кривой. Произвольной остается только начальная точка отсчета.

Обозначим через $\alpha(s)$ угол, образованный единичным касательным вектором

$$\mathbf{t}(s) = \dot{\mathbf{r}}(s) = \dot{x}(s)\,\mathbf{i} + \dot{y}(s)\,\mathbf{j}$$

с положительным направлением оси X (черт. 49). Начальное значение $\alpha(s)$ при $s = 0$ можно выбрать, очевидно, с произволом до слагаемого, кратного 2π, в остальных точках $\alpha(s)$ определится однозначно, исходя из непрерывности его изменения; α может меняться при этом в неограниченных пределах.



Черт. 49.

Так как $\mathbf{t}(s)$ — вектор единичный, то его проекции на оси (его координаты) будут соответственно $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Следовательно,

$$\dot{x}(s) = \cos\alpha, \quad \dot{y}(s) = \sin\alpha. \tag{209}$$

Учитывая, что сейчас роль параметра t играет у нас длина дуги s и, следовательно, производная $s'(t)$ обращается в единицу, мы можем переписать формулу (194) для кривизны в виде

$$k = \dot{\alpha}(s). \tag{210}$$

Здесь мы сознательно опустили в правой части знак модуля. *Мы условимся приписывать в этом параграфе (и только в нем) кривизне k знак не всегда $+$, а $\pm$ согласно формуле* (210). Очевидно,

этот знак будет $+$, если в данной точке $\dot{\alpha} > 0$, т. е. если α растет вместе с s, и $-$, если $\dot{\alpha} < 0$, т. е. если α убывает при возрастании s. Так как сейчас у нас кривая ориентирована, то направление возрастания s твердо установлено и соглашение о знаке k имеет однозначный смысл.

Добавочные соглашения об ориентации кривой и о знаке k понадобились нам для большей общности теорем, которые мы собираемся доказать. Без этих соглашений нам пришлось бы ограничиться кусками кривой, где k не обращается в нуль.

Основную роль будет играть у нас уравнение (210), выражающее *кривизну k как функцию дуги s вдоль кривой*. Перепишем его в более отвлеченной форме:

$$k = f(s), \quad S_0 \leqslant s \leqslant S. \tag{211}$$

Это уравнение называется *натуральным уравнением кривой*.

Теорема. *Если две кривые C и C' отличаются только положением на плоскости, то их натуральные уравнения имеют одинаковый вид* (после согласования начальных точек отсчета дуги).

Когда мы говорим: отличаются только „положением на плоскости", то подразумеваем, что одна кривая может быть совмещена с другой, включая и совпадение ориентаций, путем вращения на некоторый угол φ и параллельного перенесения в плоскости (т. е. двигаясь в плоскости как твердое тело). Мы ограничимся этими наглядными кинематическими определениями, имея в виду, что никакого труда не составило бы записать и их точный математический смысл. Действительно, обычные формулы преобразования прямоугольных декартовых координат:

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi + x_0,$$

$$y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi + y_0,$$

если истолковать x, y как координаты произвольной точки M на плоскости, а x', y' — как координаты некоторой другой точки M' *в той же самой координатной системе*, — определяют преобразование каждой точки M плоскости в соответствующую ей точку M'. Это преобразование и есть поворот плоскости как твердого тела на угол φ около начала координат с последующим параллельным перенесением на x_0 параллельно оси X и на y_0 — параллельно оси Y.

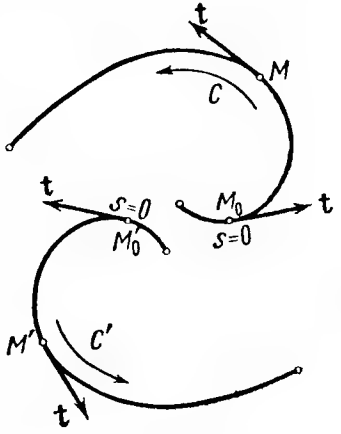
Переходя к доказательству теоремы, заметим, что между кривыми C и C' можно установить взаимно однозначное соответствие, сопоставляя попарно те точки на C и на C', которые совпадут между собой после совмещения кривых. Выберем на кривых C и C' (черт. 50) за начальные точки отсчета дуги *соответствующие* друг другу точки M_0 и M_0'. Тогда в *соответствующих* точках M и M' на обеих кривых всегда будут одинаковые значения s. Действительно, дуга M_0M после совмещения кривых и их ориентаций займет положение $M_0'M'$, а так

как во время движения кривой C как твердого тела длина дуги $\overset{\frown}{M_0M}$ не меняется, то

$$\overset{\frown}{M_0M} = \overset{\frown}{M_0'M'},$$

и следовательно, значение параметра s в M и M' одно и то же. В частности, если в начальной и конечной точках кривой C значения s будут S_0 и S, то в тех же пределах меняется s и на C'.

Далее, в точках M и M' углы наклона касательных отличаются на постоянную. Действительно, при повороте кривой C на некоторый угол φ все касательные $\mathbf{t}$ к ней повернутся на этот же угол, параллельное же перенесение на направлениях касательных никак не отразится. Поэтому значения угла α в точках M' и M (т. е. при одинаковых значениях s) отличаются на φ, и вид функции $\alpha(s)$ для кривой C' сравнительно с кривой C отличается добавлением постоянной φ. Но это значит, что после дифференцирования по s эта разница исчезает, и вид функции $\dot{\alpha}(s)$ будет один и тот же для обеих кривых. Другими словами, формула (210) определит нам кривизну k в обоих случаях как функцию от s одного и того же вида (и при s, меняющемся в тех же пределах). Этим теорема доказана.



Черт. 50.

Более интересной является

Обратная теорема. *Если две кривые C и C' имеют одно и то же натуральное уравнение*

$$k = f(s), \quad S_0 \leqslant s \leqslant S, \tag{212}$$

то они отличаются только положением на плоскости.

Отметим на кривых C и C' точки отсчета M_0 и M_0' (черт. 50). Перенесем параллельно кривую C, смещая все ее точки на один и тот же вектор, равный M_0M_0', т. е. с таким расчетом, чтобы точка M_0 попала в M_0'. После этого повернем кривую C около точки M_0 так, чтобы единичный касательный вектор $\mathbf{t}$ к кривой C в этой точке совпал с таким же вектором к кривой C'. В результате путем движения кривой C в плоскости мы добились совмещения точки M_0 и вектора $\mathbf{t}$ в ней с точкой M_0' и вектором $\mathbf{t}$ в ней. Мы докажем, что теперь кривая C целиком совпадет с C'; тем самым будет доказана наша теорема. Говоря теперь о кривой C, мы будем иметь в виду ее *после перемещения*. В силу предыдущей теоремы натуральное уравнение кривой C осталось при этом без изменения и попрежнему имеет вид (212), общий для C и C'.

Так как при $s = 0$ мы попадаем на обеих кривых C и C' в одну и ту же точку $M_0 \equiv M_0'$ с одним и тем же вектором $\mathbf{t}$, то и угол наклона этого вектора к оси X можно считать одинаковым для обеих кривых:

$$\alpha = \alpha_0 \quad \text{при } s = 0. \tag{213}$$

Далее, выпишем формулу (210)

$$\dot{\alpha}(s) = k.$$

Учитывая, что на обеих кривых k выражается одной и той же функцией дуги (212), можно записать сразу для обеих кривых

$$\dot{\alpha}(s) = f(s).$$

Интегрируя по s в пределах от 0 до s, получим

$$\alpha(s) - \alpha(0) = \int_0^s f(s)\,ds.$$

Так как $\alpha(0)$ обозначено через α_0, то окончательно

$$\alpha(s) = \int_0^s f(s)\,ds + \alpha_0.$$

Это показывает, что вид функции $\alpha(s)$ один и тот же для обеих кривых.

Запишем теперь формулы (209)

$$\dot{x}(s) = \cos\alpha(s), \quad \dot{y}(s) = \sin\alpha(s).$$

Интегрируя почленно по s в пределах от 0 до s, получим

$$x(s) - x(0) = \int_0^s \cos\alpha(s)\,ds, \quad y(s) - y(0) = \int_0^s \sin\alpha(s)\,ds.$$

Очевидно, $x(0)$, $y(0)$ суть значения x, y при $s = 0$, т. е. суть координаты начальной точки отсчета M_0 в случае кривой C и M_0' в случае кривой C'. Но точки M_0 и M_0' совпадают, и следовательно, значения $x(0)$, $y(0)$ для обеих кривых будут одни и те же. Тем самым и вид функциональной зависимости $x(s)$, $y(s)$ один и тот же для обеих кривых C и C'.

Эти кривые имеют одно и то же параметрическое представление и, следовательно, совпадают. Теорема доказана.

Две доказанные теоремы могут быть объединены в одной формулировке: *для того чтобы две кривые имели одну и ту же геометрическую форму, отличаясь лишь положением на плоскости*,

необходимо [1]) *и достаточно, чтобы они имели одно и то же натуральное уравнение* (212).

Таким образом натуральное уравнение вполне характеризует кривую с точки зрения ее геометрической формы. При этом выбор координатной системы на плоскости никак не отражается на виде натурального уравнения, так как последнее связывает величины s и k, которые зависят только от самой кривой, но не от координатной системы на плоскости.

К полученным результатам нужно сделать еще существенное добавление.

Пусть совершенно произвольно задана непрерывная функция $f(s)$ *в области изменения аргумента* $S_0 \leqslant s \leqslant S$. *В этом случае всегда можно построить кривую, для которой натуральное уравнение будет иметь вид*

$$k = f(s), \quad S_0 \leqslant s \leqslant S.$$

Для доказательства выберем произвольно некоторую точку $M_0(x_0, y_0)$ на плоскости и некоторый угол α_0. Построим функцию $\alpha(s)$:

$$\alpha(s) = \int_0^s f(s)\,ds + \alpha_0, \tag{214}$$

и затем функции

$$x(s) = \int_0^s \cos\alpha(s)\,ds + x_0, \quad y(s) = \int_0^s \sin\alpha(s)\,ds + y_0. \tag{214'}$$

Построим теперь кривую, определяемую параметрическим представлением

$$x = x(s), \quad y = y(s)$$

с ориентацией в сторону возрастания параметра s. Покажем, что она будет как раз искомой кривой (выписывая эти уравнения, мы еще не знаем заранее, будет ли параметр s длиной дуги вдоль нашей кривой). Продифференцируем (214′):

$$\left.\begin{aligned} dx &= \cos\alpha\,ds, \\ dy &= \sin\alpha\,ds. \end{aligned}\right\} \tag{215}$$

Отсюда

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds,$$

т. е. ds действительно есть дифференциал дуги, и параметр s играет роль длины дуги вдоль построенной кривой.

Перепишем (215) в виде

$$\dot{x} = \frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \dot{y} = \frac{dy}{ds} = \sin\alpha$$

[1]) После согласования начальных точек отсчета.

и выпишем затем выражение вектора $\mathbf{t}$ для построенной кривой:

$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \sin\alpha\,\mathbf{j}.$$

Эта формула показывает, что единичный вектор $\mathbf{t}$ наклонен к оси X под углом $\alpha(s)$. Вычислим, наконец, для построенной кривой кривизну k по формуле (210):

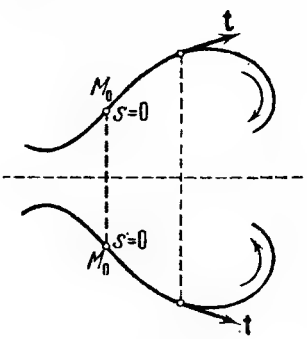
$$k = \dot{\alpha}(s).$$

Но так как $\alpha(s)$ введено у нас согласно (214), то это значит, что

$$k = f(s).$$

Мы доказали, что построенная кривая обладает наперед заданным натуральным уравнением.

Конечно, такая кривая будет не единственной. Как следует из предыдущих теорем, таким же натуральным уравнением будут обладать те и только те кривые, которые получаются из данной путем ее движений по плоскости. В нашем построении это обстоятельство сказалось в произвольном выборе точки M_0 и угла α_0.



Черт. 51.

В заключение заметим, что зеркально симметрические кривые (черт. 51) не переводятся одна в другую движением в плоскости (для этого требуется вращение в пространстве), так что они будут обладать разными натуральными уравнениями. Возьмем на этих кривых соответственные начальные точки отсчета и соответственные ориентации; чем тогда будут различаться их натуральные уравнения? Нетрудно подсчитать, что в соответственных точках значения угла α для обеих кривых отличаются знаком, если не обращать внимания на постоянное слагаемое. В таком случае значения $k = \dot{\alpha}$ также отличаются знаком, и если для одной кривой натуральное уравнение будет

$$k = f(s),$$

то для другой оно примет вид

$$k = -f(s).$$

Упражнения.

1. Показать, что натуральное уравнение цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ есть $aR = a^2 + s^2$, где R — радиус кривизны (дуга s отсчитывается от точки $x = 0$).

2. Найти кривую, натуральное уравнение которой

$$\mu^2 R^2 + \nu^2 s^2 = 1,$$

где $\mu \neq \nu$ — постоянные > 0; s меняется от $-\frac{1}{\nu}$ до $+\frac{1}{\nu}$.

Выразим кривизну:

$$k = \frac{\mu}{\sqrt{1-\nu^2 s^2}}.$$

Ищем угол наклона α:

$$\alpha = \int k\,ds = \int \frac{\mu\,ds}{\sqrt{1-\nu^2 s^2}} = \frac{\mu}{\nu}\arcsin \nu s.$$

Отсюда

$$s = \frac{1}{\nu}\sin\frac{\alpha\nu}{\mu}, \qquad ds = \frac{1}{\mu}\cos\frac{\alpha\nu}{\mu}\cdot d\alpha.$$

Примем α за параметр вдоль искомой кривой.

Так как

$$dx = \cos\alpha\,ds = \frac{1}{\mu}\cos\frac{\alpha\nu}{\mu}\cos\alpha\,d\alpha = \frac{1}{2\mu}\left(\cos\left(1+\frac{\nu}{\mu}\right)\alpha + \cos\left(1-\frac{\nu}{\mu}\right)\alpha\right)d\alpha,$$

$$dy = \sin\alpha\,ds = \frac{1}{\mu}\cos\frac{\alpha\nu}{\mu}\sin\alpha\,d\alpha = \frac{1}{2\mu}\left(\sin\left(1+\frac{\nu}{\mu}\right)\alpha + \sin\left(1-\frac{\nu}{\mu}\right)\alpha\right)d\alpha,$$

то

$$x = \int \cos\alpha\,ds = \frac{\sin\left(1+\frac{\nu}{\mu}\right)\alpha}{2(\mu+\nu)} + \frac{\sin\left(1-\frac{\nu}{\mu}\right)\alpha}{2(\mu-\nu)}$$

$$y = \int \sin\alpha\,ds = -\frac{\cos\left(1+\frac{\nu}{\mu}\right)\alpha}{2(\mu+\lambda)} - \frac{\cos\left(1-\frac{\nu}{\mu}\right)\alpha}{2(\mu-\lambda)}.$$

Во всех квадратурах мы откидываем произвольную постоянную, так как нам важно получить хоть одну кривую (остальные отличаются от нее лишь положением на плоскости).

Повернув кривую около начала на угол $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\mu}{\nu}$ и введя в качестве параметра $\varphi = 2\frac{\nu}{\mu}\alpha + \pi$, мы замечаем, что полученная кривая есть либо гипоциклоида, либо эпициклоида (ср. конец § 7). Выяснить, при каких условиях, наложенных на μ, ν, имеет место первое, при каких условиях второе, и выразить в каждом случае a и λ через μ и ν.

3. Найти кривую с натуральным уравнением

$$R^2 + s^2 = a^2, \qquad a = \text{const}.$$

Показать, что это циклоида.

4. Найти кривую с натуральным уравнением

$$R^2 = as.$$

Показать, что это эвольвента окружности.

ГЛАВА IV.

ТЕОРИЯ КРИВИЗНЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ.

§ 24. Касательные; нормали.

Как было уже оговорено в конце § 12, мы рассматриваем кривые

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k} \tag{216}$$

лишь в их заведомо обыкновенных точках, т. е. при условии

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k} \neq 0, \tag{216'}$$

или, записывая параметрическое представление (216) в координатной форме

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \tag{217}$$

мы ограничиваемся точками, где

$$x'(t),\ y'(t),\ z'(t)$$

не обращаются одновременно в нуль.

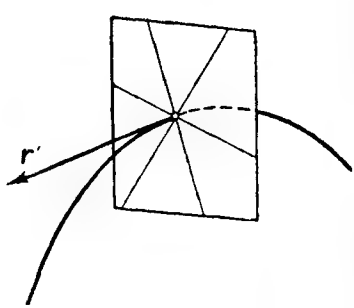
Истолковывая диференцирование вектор-функции $\mathbf{r}(t)$, представляющей текущий радиус-вектор кривой в зависимости от параметра t, мы обнаружили, что производная $\mathbf{r}'(t)$ направлена по касательной в соответствующей точке кривой $M(t)$.

Воспользуемся этим результатом прежде всего для записи уравнения касательной. Касательную в данной точке кривой $M(t)$ мы можем рассматривать как прямую, проходящую через эту точку

$$M\,[x(t),\ y(t),\ z(t)]$$

по направлению вектора

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}.$$



Черт. 52.

Как известно из аналитической геометрии, уравнение такой прямой (в форме пропорций) имеет вид

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \frac{Z - z(t)}{z'(t)}, \tag{218}$$

где X, Y, Z — текущие координаты.

Нормалью к пространственной кривой называется перпендикуляр, восставленный к касательной в точке касания. Конечно в данной точке кривой будет бесчисленное множество нормалей. Все они перпендикулярны к касательной в этой точке и заполняют, следовательно, целую плоскость, перпендикулярную касательной.

Плоскость, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной, называется нормальной плоскостью (черт. 52).

Заметим, что плоская кривая, если ее рассматривать вмещенной в пространство, также обладает бесчисленным множеством нормалей. Мы рассматривали в предыдущем лишь одну нормаль плоской кривой потому, что ограничивались нормалью, лежащей в плоскости самой кривой.

Нетрудно составить уравнение нормальной плоскости как плоскости, проходящей через точку кривой

$$M[x(t),\ y(t),\ z(t)]$$

перпендикулярно касательному вектору

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\,\mathbf{i} + y'(t)\,\mathbf{j} + z'(t)\,\mathbf{k}.$$

Из аналитической геометрии известно, что уравнение такой плоскости имеет вид

$$x'(t)[X - x(t)] + y'(t)[Y - y(t)] + z'(t)[Z - z(t)] = 0. \quad (219)$$

Мы получили уравнение нормальной плоскости.

Касательная плоскость к поверхности.

Рассмотрим поверхность, заданную уравнением между текущими координатами, т. е. геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x, y, z) = 0. \quad (220)$$

Проведем на этой поверхности какую-нибудь кривую (217). Тогда при любом значении t точка $M[x(t), y(t), z(t)]$ кривой лежит на поверхности, так что уравнение (220) после подстановки $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ должно обращаться в тождество:

$$F[x(t),\ y(t),\ z(t)] \equiv 0. \quad (220')$$

Продифференцируем это тождество по t. Получим

$$F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t) \equiv 0 \quad (220'')$$

в каждой точке кривой на поверхности. В левой части x', y', z' зависят от выбора кривой на поверхности и представляют собой координаты касательного к кривой вектора $\mathbf{r}'(t)$. Что же касается F_x, F_y, F_z, то они зависят только от выбора точки x, y, z на поверхности. Составим вектор

$$\nabla F(x, y, z) = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k}, \quad (221)$$

имеющий в каждой точке поверхности вполне определенное значение; ∇F — его краткое обозначение. [Собственно говоря, вектор ∇F, определяемый формулой (221), существует в каждой точке всей *пространственной* области, в которой задана диференцируемая функция точки $F(x, y, z)$. Вектор ∇F называется *градиентом* функции F, или, как часто говорят, скалярного поля $F(x, y, z)$. Понятие градиента

принадлежит к числу основных понятий векторного анализа в специальном смысле этого слова и имеет важные физико-механические применения.]

Всматриваясь в левую часть (220″), мы замечаем, что она представляет собой скалярное произведение векторов (221) и (216′), т. е. вектора-градиента в данной точке поверхности и касательного вектора к кривой, проходящей по поверхности, в той же точке. Мы можем переписать (220″) в виде

$$\nabla F(x, y, z)\,\mathbf{r}'(t) = 0. \tag{222}$$

Мы ограничимся рассмотрением на поверхности только тех точек, где вектор ∇F не исчезает:

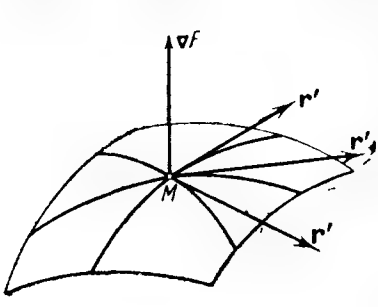
$$\nabla F(x, y, z) \neq 0, \tag{223}$$

или, что то же самое, где F_x, F_y, F_z не равны одновременно нулю.

Смысл этого ограничения мы выясним немного позже.

В таком случае формулу (222) можно истолковать геометрически так.

Будем через данную точку $M(x, y, z)$ поверхности проводить всевозможные кривые по поверхности и брать к ним в этой точке касательные векторы $\mathbf{r}'(t)$. Тогда (222) показывает, что все эти векторы будут перпендикулярны к вектору $\nabla F(x, y, z)$, вполне определенному в данной точке $M(x, y, z)$, и расположатся все в одной плоскости, проходящей через M перпендикулярно ∇F (черт. 53).



Черт. 53.

Итак, *все касательные в данной точке M поверхности* (в которой $\nabla F \neq 0$) *к всевозможным кривым, проходящим по поверхности, располагаются в одной плоскости, перпендикулярной ∇F. Эта плоскость называется касательной плоскостью к поверхности в точке M.*

Нетрудно составить уравнение касательной плоскости как плоскости, проходящей через данную точку $M(x, y, z)$ перпендикулярно данному вектору (221). Уравнение будет иметь вид

$$F_x(x, y, z)(X - x) + F_y(x, y, z)(Y - y) + F_z(x, y, z)(Z - z) = 0, \tag{224}$$

где X, Y, Z — текущие координаты.

Нормалью к поверхности называется перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания (черт. 53). Очевидно, в каждой точке M нормаль будет единственной. Ее уравнение легко составить как уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x, y, z)$ параллельно

вектору ∇F. Уравнение такой прямой будет иметь вид

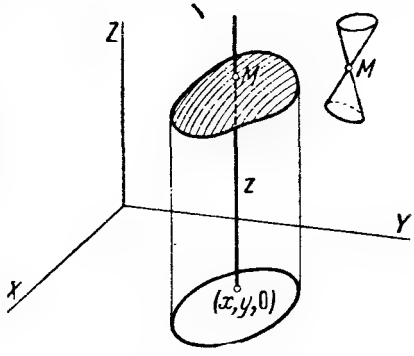
$$\frac{X-x}{F_x(x, y, z)} = \frac{Y-y}{F_y(x, y, z)} = \frac{Z-z}{F_z(x, y, z)}. \qquad (224')$$

Выясним теперь смысл условия (223). Допустим для определенности, что в данной точке именно $F_z \neq 0$. Тогда по теореме существования неявной функции уравнение поверхности (220) однозначно разрешимо вблизи данной точки относительно z и может быть переписано в виде

$$z = f(x, y). \qquad (225)$$

Если в какой-нибудь системе координат x, y, z уравнение поверхности вблизи данной точки может быть написано в виде, разрешенном относительно одной координаты, то мы будем называть эту точку ***обыкновенной*** точкой поверхности.

Таким образом точка, где соблюдено условие (223), является заведомо обыкновенной. Геометрически же уравнение (225) означает, как известно, что каждой точке $(x, y, 0)$ в некоторой области на плоскости XY отвечает одна и только одна точка поверхности (x, y, z), получаемая путем смещения точки $(x, y, 0)$ параллельно оси Z на отрезок $f(x, y)$. Наглядно мы можем, следовательно, представлять себе соответствующий кусок поверхности как кусок плоскости, деформированный путем плавного смещения его точек в направлении, перпендикулярном к плоскости (черт. 54). Такого рода строение характерно для поверхности вблизи ее обыкновенной точки.



Черт. 54.

Если условие (223) не соблюдено, то точка может оказаться *особой*, с совсем другими свойствами. Так, для поверхности

$$F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

в точке $x = y = z = 0$ обращаются в нуль все частные производные F_x, F_y, F_z. И действительно, эта точка служит вершиной конуса, вблизи которой, как бы ни уменьшать окрестность, уравнение конуса нельзя записать в виде (225) (черт. 54).

Наша теорема о существовании касательной плоскости, в которой расположатся касательные ко всем кривым на поверхности, в этой точке тоже неверна.

Касательная и нормальная плоскость к кривой, полученной пересечением двух поверхностей.

Рассмотрим две какие-нибудь поверхности

$$F^{(1)}(x, y, z) = 0, \quad F^{(2)}(x, y, z) = 0. \qquad (226)$$

Геометрическое место точек, общих обеим поверхностям, мы будем называть кривой их пересечения. Покажем, что это действительно кривая в том смысле, что вблизи любой своей точки, за исключением, может быть, некоторых особых, наше геометрическое место представляет собой простой отрезок (см. § 12).

Возьмем какую-нибудь точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на кривой; ее координаты удовлетворяют по определению обоим уравнениям:

$$F^{(1)}(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad F^{(2)}(x_0, y_0, z_0) = 0. \tag{227}$$

Построим в точке M_0 векторы $\nabla F^{(1)}$ и $\nabla F^{(2)}$.

Мы предположим, что эти векторы не коллинеарны друг другу [1]), *т. е. что касательные плоскости к обеим поверхностям в точке* M_0 *не совпадают между собой:*

$$\nabla F^{(1)} \neq \nabla F^{(2)}. \tag{228}$$

Это условие, которое практически обычно выполняется за исключением отдельных точек кривой, как раз и гарантирует нам обыкновенный характер точки M_0 на кривой, т. е. строение кривой вблизи точки в виде простого отрезка. В самом деле, перепишем условие (228) в координатной форме. Для параллельности векторов необходима и достаточна пропорциональность их соответствующих координат; поэтому условие непараллельности векторов $\nabla F^{(1)}$ и $\nabla F^{(2)}$ можно записать так: $F_x^{(1)}$, $F_y^{(1)}$, $F_z^{(1)}$ и $F_x^{(2)}$, $F_y^{(2)}$, $F_z^{(2)}$ не пропорциональны между собой, или, что то же, хотя бы один из трех детерминантов 2-го порядка, выделенных из соответствующей матрицы, отличен от нуля. Пусть, для определенности,

$$\begin{vmatrix} F_y^{(1)} & F_z^{(1)} \\ F_y^{(2)} & F_z^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{228'}$$

Итак, значения x_0, y_0, z_0 удовлетворяют уравнениям (226); кроме того, якобиан левых частей (226) по переменным y и z отличен от нуля в точке M_0, т. е. при значениях переменных x_0, y_0, z_0.

По теореме существования неявных функций (Гурса, Курс анализа, т. I, §§ 33, 38) в этом случае уравнения (226) вблизи значений $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ однозначно разрешимы относительно переменных y и z и могут быть, следовательно, переписаны в виде

$$y = y(x), \quad z = z(x). \tag{229}$$

А это и показывает, что вблизи точки M_0 кривая представляет собой простой отрезок.

Поскольку в этом случае кривая имеет в M_0 обыкновенную точку, применимы все наши предыдущие результаты. Прежде всего, раз кривая лежит на обеих поверхностях, касательная к ней в точке M_0 рас-

[1]) Тем самым ни один из них не обращается в нуль, так как вектор, равный нулю, можно считать коллинеарным любому другому.

положится на касательных плоскостях, взятых к той и другой поверхности в той же точке M_0 (по определению касательной плоскости). Следовательно, касательная к кривой в M_0, являясь пересечением обеих касательных плоскостей, будет перпендикулярна к обоим нормальным векторам $\nabla F^{(1)}$ и $\nabla F^{(2)}$ (черт. 55). Отсюда ясно, что векторное произведение

$$[\nabla F^{(1)}, \nabla F^{(2)}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ F_x^{(1)} & F_y^{(1)} & F_z^{(1)} \\ F_x^{(2)} & F_y^{(2)} & F_z^{(2)} \end{vmatrix} \tag{230}$$

направлено параллельно касательной к кривой пересечения.

Теперь легко написать и уравнение этой касательной как прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору (230):

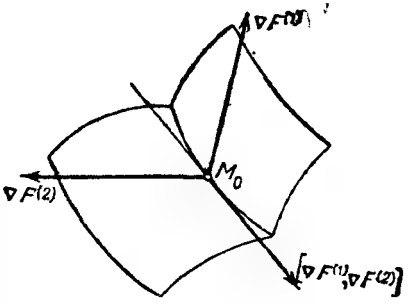
$$\frac{X-x_0}{\begin{vmatrix} F_y^{(1)} & F_z^{(1)} \\ F_y^{(2)} & F_z^{(2)} \end{vmatrix}} = \frac{Y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z^{(1)} & F_x^{(1)} \\ F_z^{(2)} & F_x^{(2)} \end{vmatrix}} = \frac{Z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x^{(1)} & F_y^{(1)} \\ F_x^{(2)} & F_y^{(2)} \end{vmatrix}}. \tag{231}$$

Так же просто составляется и уравнение нормальной плоскости к кривой пересечения как плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору (230):

$$(X-x_0)\begin{vmatrix} F_y^{(1)} & F_z^{(1)} \\ F_y^{(2)} & F_z^{(2)} \end{vmatrix} + (Y-y_0)\begin{vmatrix} F_z^{(1)} & F_x^{(1)} \\ F_z^{(2)} & F_x^{(2)} \end{vmatrix} + \\ + (Z-z_0)\begin{vmatrix} F_x^{(1)} & F_y^{(1)} \\ F_x^{(2)} & F_y^{(2)} \end{vmatrix} = 0 \tag{232}$$

или

$$\begin{vmatrix} X-x_0 & Y-y_0 & Z-z_0 \\ F_x^{(1)} & F_y^{(1)} & F_z^{(1)} \\ F_x^{(2)} & F_y^{(2)} & F_z^{(2)} \end{vmatrix} = 0. \tag{232'}$$



Черт. 55.

В заключение можно пояснить на простых примерах, почему условие (228) гарантирует обыкновенный характер точки на кривой пересечения и почему несоблюдение этого условия, т. е. совпадение касательных плоскостей к обеим поверхностям в данной точке может привести к особому характеру этой точки.

Представим себе прежде всего две сферы, касающиеся друг друга в некоторой точке M_0. В этой точке касательные плоскости к обеим

сферам совпадают, так что условие (228) не соблюдено, и действительно, линия пересечения состоит из одной только точки M_0, которая является на ней, таким образом, изолированной особой точкой.

Такое положение невозможно, конечно, в тех случаях, когда касательные плоскости к сферам встречаются в точке пересечения под углом, отличным от нуля.

Далее, возьмем пересечение гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

с плоскостью $z = 0$. Если взять в качестве точки M_0 начало координат, лежащее на обеих поверхностях, то касательные плоскости к обеим поверхностям совпадут (для плоскости $z = 0$ касательной плоскостью во всех точках служит, разумеется, она сама). И действительно, линия пересечения обеих поверхностей, т. е. пара прямых

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0$$

на плоскости XY, имеет в начале координат особую точку (самопересечение).

§ 25. Касание кривой с поверхностью.

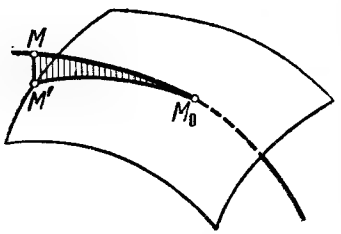
Пусть через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (черт. 56) проходят кривая $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ (при $t = t_0$) и поверхность $F(x, y, z) = 0$.

Как обычно, предполагаем, что в точке M_0 соблюдаются условия

$$\nabla F = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \neq 0$$

(для определенности пусть $F_z \neq 0$) и

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k} \neq 0.$$



Черт. 56.

Нас интересует вопрос об оценке близости между кривой и поверхностью в бесконечно малой области около точки M_0. Мы подойдем к этой оценке следующим путем. Возьмем на кривой какую-нибудь точку $M[x(t), y(t), z(t)]$ и проведем через нее параллель оси Z до пересечения с поверхностью в точке, которую обозначим через M'. Ограничиваясь достаточно малой окрестностью точки M_0, можно утверждать, что это пересечение произойдет и при этом в единственной точке. Действительно, так как в точке M_0 мы имеем $F_z \neq 0$, уравнение поверхности вблизи нее может быть приведено к виду

$$z = f(x, y)$$

и после подстановки $x(t)$, $y(t)$ определяет нам точку на поверхности с координатами $x(t)$, $y(t)$, Z, где

$$Z = f[x(t), y(t)].$$

Эта точка поверхности и есть искомая точка M', так как она имеет значения x, y, общие с M, и лежит с нею, следовательно, на одной параллели оси Z. Отрезок $M'M = z(t) - Z$, естественно, будет измерять расстояние „по вертикали" между кривой в точке M и поверхностью.

Пусть теперь t стремится к t_0; тогда точка M стремится в M_0, равно как и M', так что отрезок $M'M$ стремится к нулю. Изучим теперь *порядок малости отрезка $M'M$ по отношению к $t - t_0$*.

Для этого очень удобным приемом является составление функции

$$\varphi(t) = F[x(t), y(t), z(t)], \tag{233}$$

полученной подстановкой в левую часть уравнения поверхности текущих координат кривой. Так как кривая не лежит на поверхности, то $\varphi(t)$, вообще говоря, отлична от нуля; при $t = t_0$ мы имеем точку, общую кривой и поверхности, и следовательно, уравнение поверхности в ней удовлетворяется:

$$\varphi(t_0) = 0.$$

При t, стремящемся к t_0, $\varphi(t)$ стремится, следовательно, к нулю. Покажем, что $\varphi(t)$ *будет при этом бесконечно малым одного порядка с отрезком $M'M$*.

Запишем, что точка $M'[x(t), y(t), Z]$ удовлетворяет своими координатами уравнению поверхности:

$$0 = F[x(t), y(t), Z].$$

Вычтем это равенство почленно из (233) и применим в правой части теорему о конечном приращении, рассматривая F как функцию третьего аргумента при закрепленных двух первых. Получим

$$\varphi(t) = F[x(t), y(t), z(t)] - F[x(t), y(t), Z] = F_z[x(t), y(t), \zeta][z(t) - Z],$$

где ζ — некоторое промежуточное значение между $z(t)$ и Z. Но при t, стремящемся к t_0, точки M и M' стремятся в M_0 и, следовательно, z и Z, вместе с заключенным между ними значением ζ, стремятся к z_0. Очевидно также, что

$$x(t) \to x_0, \quad y(t) \to y_0.$$

Поэтому из предыдущего равенства следует, что при $t \to t_0$

$$\frac{\varphi(t)}{z(t) - Z} = F_z[x(t), y(t), \zeta] \to F_z(x_0, y_0, z_0).$$

Итак, отношение бесконечно малых $z(t) - Z$ и $\varphi(t)$ стремится к пределу и при этом отличному от нуля (по предположениям, сделанным

в начале этого параграфа). Мы видим, что $z(t) - Z$ и $\varphi(t)$ — бесконечно малые одного порядка.

Наиболее тривиальная возможность здесь та, когда они будут *первого* порядка относительно $t - t_0$; в наглядном представлении это будет *пересечение* кривой и поверхности под некоторым углом. Этот случай мы оставляем в стороне и займемся случаями, когда $\varphi(t)$ [и, следовательно, отрезок $M'M$, равный $z(t) - Z$] будет бесконечно малым *порядка выше первого относительно* $t - t_0$. Тогда мы скажем, что кривая *касается* поверхности в точке M_0. Мы говорим, что *касание* n-го *порядка*, если порядок бесконечно малого $M'M$ будет выше n, и что *касание точно* n-го *порядка* (а не выше), если порядок $M'M$ точно $n+1$ (а не выше).

Нам нужно выяснить прежде всего *инвариантный характер этих определений*. Дело в том, что мы оценивали расстояние $M'M$ кривой от поверхности „по вертикали", т. е в направлении оси Z. Мы могли бы переименовать координатные оси, или, более обще, произвести любой поворот координатных осей в пространстве и повторить все построение для новой оси Z, выбранной произвольно (исключая только те положения, для которых $F_z = 0$ в точке M_0, т. е. когда ось Z параллельна касательной плоскости в M_0). Возникает вопрос, сохранит ли наше определение касания n-го порядка один и тот же геометрический смысл при любом выборе координатной системы?

Но, преобразуя координатную систему, мы подставляем в уравнение поверхности

$$F(x, y, z) = 0$$

выражение старых координат через новые, оставляя без изменения сами численные значения F в каждой точке пространства; следовательно, и значение F в каждой точке $M(t)$ на кривой останется прежним, т. е. значения $\varphi(t)$ [см. (233)] при каждом данном t остаются те же. Отсюда следует, что порядок бесконечно малого $\varphi(t)$ при $t \to t_0$ остается без изменения при переходе к другой координатной системе.

Добавим сюда, что условие $\mathbf{r}'(t) \neq 0$, т. е.

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{t - t_0} \underset{t \to t_0}{\to} \mathbf{r}'(t) \neq 0,$$

показывает, что $t - t_0$ есть бесконечно малое одного порядка с модулем вектора $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, т. е. с длиной хорды M_0M. Так как эта длина не зависит от выбора параметризации на кривой, то порядок один и тот же при всех допустимых параметризациях.

Итак, при любом выборе координатной системы x, y, z *и параметризации* t *на кривой* (с соблюдением, конечно, условий, указанных в начале этого параграфа) *порядок бесконечно малых* $t - t_0$ *и* $\varphi(t)$ *остается без изменения.* Следовательно, порядок $\varphi(t)$ (или, что то же, порядок $M'M$) относительно $t - t_0$ зависит только от самой поверхности и кривой, но не зависит от выбора координатной системы в простран-

стве и параметризации на кривой. Наши определения имеют, следовательно, инвариантный геометрический смысл.

Наконец, следует указать *практическую запись условий касания n-го порядка*. Разложим функцию $\varphi(t)$ в ряд Тэйлора по степеням $t-t_0$. Так как касание n-го порядка означает, что $\varphi(t)$ есть бесконечно малое выше n-го порядка относительно $t-t_0$, то в разложении должны исчезнуть все члены до n-й степени включительно.

Запишем условия этого, приравняв нулю коэфициенты при $t-t_0$ в степенях $\leqslant n$:

$$\varphi(t_0)=\varphi'(t_0)=\varphi''(t_0)=\ldots=\varphi^{(n)}(t_0)=0. \tag{234}$$

Очевидно, эти условия и достаточны, так как при их наличии разложение может начаться не ниже чем с $n+1$-й степени $t-t_0$.

Первое из этих условий

$$\varphi(t_0)=0$$

выражает, что при $t=t_0$ точка кривой попадает на поверхность. Второе из них, пользуясь выражением (233) для $\varphi(t)$, можно переписать в виде

$$\varphi'(t_0)=F_x x'(t_0)+F_y y'(t_0)+F_z z'(t_0)=0$$

или

$$\nabla F\cdot \mathbf{r}'(t_0)=0.$$

Эта формула показывает, что *касательный вектор к кривой в точке M_0 перпендикулярен ∇F в той же точке и лежит, следовательно, в касательной плоскости к поверхности*. В этом и состоит, можно считать, касание 1-го порядка. Присоединяя последующие условия, мы получаем более тесную близость кривой и поверхности — касания 2-го, 3-го и т. д. порядков.

§ 26. Соприкасающаяся плоскость.

При дальнейшем изучении пространственной кривой

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$$

мы присоединим к обычному нашему предположению, что

$$\mathbf{r}'(t)=x'(t)\,\mathbf{i}+y'(t)\,\mathbf{j}+z'(t)\,\mathbf{k}\neq 0,$$

т. е. что все ее точки заведомо обыкновенные, еще предположение, что

$$\mathbf{r}''(t) \text{ и } \mathbf{r}'(t) \text{ неколлинеарны.} \tag{235}$$

Этим самым мы устраняем из рассмотрения точки, где

$$\mathbf{r}''\parallel\mathbf{r}'. \tag{236}$$

Ниже будет выяснено, что в случае (236) касание кривой с ее касательной будет по крайней мере 2-го порядка. Такие точки мы будем называть *точками распрямления*. Заметим, что если условие (236) выполняется вдоль всей кривой, которая, таким образом, вся состоит

из точек распрямления, то кривая вырождается в прямую линию. Действительно, параллельность векторов r'' и r' можно записать как пропорциональность их координат:

$$\frac{x''(t)}{x'(t)} = \frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{z''(t)}{z'(t)}. \tag{235'}$$

Умножая это равенство на dt:

$$\frac{dx'}{x'} = \frac{dy'}{y'} = \frac{dz'}{z'}$$

и интегрируя почленно, получим

$$\ln x' + \ln a = \ln y' + \ln b = \ln z' + \ln c,$$

где $\ln a$, $\ln b$, $\ln c$ — постоянные интегрирования. Потенцируя, приходим к равенству

$$ax' = by' = cz'.$$

Интегрируя еще раз и обозначая новые постоянные интегрирования через A, B, C, получаем

$$ax + A = by + B = cz + C,$$

т. е. уравнение прямой в пространстве.

Итак, кривая, отличная от прямой, не может состоять целиком из точек распрямления; если вообще эти точки на ней существуют, то встречаются лишь при отдельных значениях t, удовлетворяющих сразу двум уравнениям (235'). Точки распрямления представляют собой, таким образом, нетипический случай с особым характером поведения кривой вблизи них, почему мы и устраняем их из общей теории. В дальнейшем, говоря о какой-нибудь точке, мы считаем, что это не есть точка распрямления (если не оговорено противное).

Изучим теперь поведение $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ при переходе к другому параметру, например τ, вдоль той же кривой. Мы можем тогда выразить старый параметр t как функцию от нового τ:

$$t = t(\tau).$$

Тем самым радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ можно рассматривать как функцию от функции τ и диференцировать по τ. Получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} &= \mathbf{r}'(t)\frac{dt}{d\tau}, \\ \frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} &= \mathbf{r}''(t)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \mathbf{r}'(t)\frac{d^2t}{d\tau^2}. \end{aligned}\right\} \tag{237}$$

Таким образом первая и вторая производные по новому параметру τ выражаются через $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ линейными комбинациями со скалярными коэфициентами и, следовательно, параллельны их плоскости (компланарны с $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$).

Конечно, верно и обратное, т. е. что $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ параллельны плоскости $\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}$, $\frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2}$, так что вообще *плоскость, определяемая в точке $M(t)$ век-*

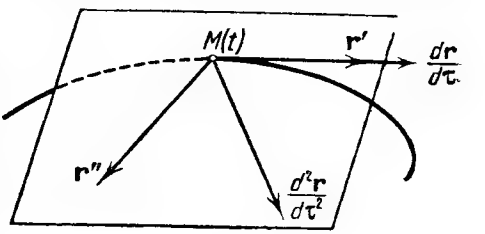
торами $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{r}''(t)$ (черт. 57), *не зависит от выбора параметризации на кривой.*

Заметим кстати, что если при данном выборе параметризации соблюдалось условие (236) и, следовательно, $\mathbf{r}''$, как и $\mathbf{r}'$, были направлены по касательной, то (237) показывает, что $\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}$, $\frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2}$ будут иметь то же направление и условие (236) будет соблюдаться и в новой параметризации.

Отсюда ясно, что и условие (235) сохраняет свой смысл при любом выборе параметра вдоль кривой.

После этих предварительных замечаний переходим к построению одного из важнейших понятий теории пространственных кривых, именно понятия соприкасающейся плоскости.

Мы называем *соприкасающейся плоскостью в данной точке кривой* $M(t)$ *плоскость, имеющую в этой точке касание 2-го порядка с кривой.* Следовательно, уклонение кривой от своей соприкасающейся плоскости, подсчитанное вблизи точки касания так, как было указано в § 25 для кривой и любой поверхности, должно быть бесконечно малым 3-го порядка (или выше).



Черт. 57.

Найдем соприкасающуюся плоскость в данной точке $M(t)$ на кривой, выяснив попутно ее существование и единственность. Возьмем как частный случай поверхности, рассматриваемой в § 25, некоторую плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{238}$$

Коэфициенты в уравнении оставляем пока неопределенными. Составим функцию $\varphi(t)$, подставляя в левую часть уравнения текущие координаты кривой.

Вычислим $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$ и потребуем от плоскости (238) касания 2-го порядка с нашей кривой, т. е. запишем условия (234) при $n = 2$. Получим

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t) &= Ax + By + Cz + D = 0, \\ \varphi'(t) &= Ax' + By' + Cz' = 0, \\ \varphi''(t) &= Ax'' + By'' + Cz'' = 0. \end{aligned}\right\} \tag{239}$$

Уравнения эти предполагаются записанными при *определенном* значении аргумента t, отвечающем *данной* точке $M(t)$ на кривой. Для краткости мы записываем это значение просто через t, а не t_0, как в (234), и подразумеваем его при x, x', x'' и т. д., не выписывая явно. Итак, соблюдение условий (239) необходимо и достаточно для того, чтобы плоскость (238) была соприкасающейся в данной точке $M(t)$.

Составим теперь вектор

$$\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k},$$

перпендикулярный к плоскости (238).

Так как

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} \quad \text{и} \quad \mathbf{r}'' = x''\mathbf{i} + y''\mathbf{j} + z''\mathbf{k},$$

то последние два условия (239) можно переписать в виде

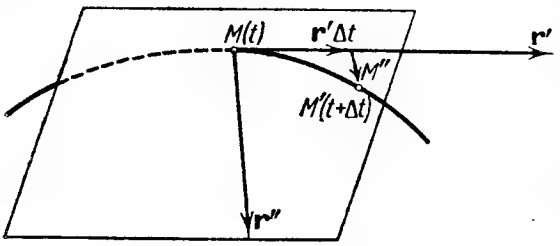
$$\mathbf{N}\mathbf{r}' = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{N}\mathbf{r}'' = 0. \tag{240}$$

Обращение в нуль этих скалярных произведений означает перпендикулярность векторов $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ к вектору $\mathbf{N}$. Но так как $\mathbf{N}$ перпендикулярен к искомой плоскости (238), то уравнения (240) утверждают, что $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ должны быть параллельны этой плоскости.

Что же касается первого из уравнений (239), то оно означает, что искомая плоскость (238) должна проходить через данную точку $M(t)$ на кривой.

Итак, *для того чтобы плоскость была соприкасающейся в данной точке $M(t)$ на кривой, необходимо и достаточно, чтобы она проходила через точку $M(t)$ и векторы $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{r}''(t)$ в этой точке* (другими словами, через касательную в точке M и вектор $\mathbf{r}''$ в этой точке).

Тем самым мы видим, что соприкасающаяся плоскость всегда существует и будет единственной (за исключением точек распрямления, где $\mathbf{r}' \parallel \mathbf{r}''$ и соприкасающаяся плоскость становится неопределенной).



Черт. 58.

Любопытно, что отсюда следует, что плоскость векторов $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$, совпадая с соприкасающейся плоскостью, не зависит от выбора параметра t вдоль кривой. Этот результат был только что получен нами другим путем, из уравнений (237).

Роль соприкасающейся плоскости заключается в том, что среди всех плоскостей, проходящих через данную точку кривой $M(t)$, она единственная так тесно прилажена к кривой, что при смещении из точки $M(t)$ по кривой уклонение от нее будет бесконечно малым 3-го порядка (не ниже) относительно приращения параметра t. Другими словами, *если пренебречь бесконечно малыми 3-го порядка и выше, то всякую пространственную кривую в бесконечно малом около данной точки $M(t)$ можно считать плоской, а именно расположенной в соприкасающейся плоскости в этой точке.*

Это обстоятельство можно подтвердить и другим, очень наглядным путем. Перейдем из данной точки $M(t)$ в бесконечно близкую точку $M'(t + \Delta t)$ (черт. 58). Разложим радиус-вектор точки M' в ряд Тэй-

лора, взяв остаточный член после члена 2-й степени:

$$\mathbf{r}(t+\Delta t)=\mathbf{r}(t)+\mathbf{r}'(t)\,\Delta t+\frac{1}{2}\,\mathbf{r}''(t)\,(\Delta t)^2+\mathbf{Q}_2\frac{(\Delta t)^3}{6}.$$

Вектор смещения из точки M в точку M' равен

$$\overrightarrow{MM'}=\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}'(t)\,\Delta t+\frac{1}{2}\,\mathbf{r}''(t)\,(\Delta t)^2+\frac{1}{6}\,\mathbf{Q}_2(\Delta t)^3.$$

Таким образом, если взять прежде всего член первого порядка $\mathbf{r}'\Delta t$, смещение происходит по касательной, а значит и в соприкасающейся плоскости. Затем, если добавить член второго порядка $\frac{1}{2}\,\mathbf{r}''(\Delta t)^2$, мы смещаемся по направлению вектора $\mathbf{r}''$, т. е. уклонившись от касательной, но еще в соприкасающейся плоскости, и попадаем в некоторую точку M''. И только добавление остаточного члена выводит нас из соприкасающейся плоскости, переводя из M'' в точку M' на кривой. Но так как остаточный член при Δt, стремящемся к нулю, будет бесконечно малым 3-го порядка (не ниже), то, если учитывать лишь бесконечно малые 1-го и 2-го порядков, допуская ошибку 3-го порядка, можно сказать, что вблизи $M(t)$ кривая лежит в своей соприкасающейся плоскости [1]).

Очевидно, что для плоской кривой соприкасающейся плоскостью служит во всех точках плоскость, в которой кривая расположена.

Составим теперь окончательно *уравнение соприкасающейся плоскости*. Так как векторы $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ лежат в соприкасающейся плоскости, то их векторное произведение

$$[\mathbf{r}',\mathbf{r}'']=(y'z''-z'y'')\,\mathbf{i}+(z'x''-x'z'')\,\mathbf{j}+(x'y''-y'x'')\,\mathbf{k}, \quad (241)$$

отличное от нуля в силу (235), будет к ней перпендикулярно. Рассматривая соприкасающуюся плоскость как плоскость, проходящую через данную точку $M(x, y, z)$ на кривой перпендикулярно к вектору (241), мы можем записать ее уравнение в виде

$$(X-x)(y'z''-z'y'')+(Y-y)(z'x''-x'z'')+(Z-z)(x'y''-y'x'')=0, \quad (242)$$

или

$$(\mathbf{R}-\mathbf{r})\,[\mathbf{r}',\mathbf{r}'']=0,$$

где X, Y, Z — текущие координаты, $\mathbf{R}$ — скользящий радиус-вектор соприкасающейся плоскости. Левую часть (242) можно переписать более сжато в виде определителя 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=0 \quad (242')$$

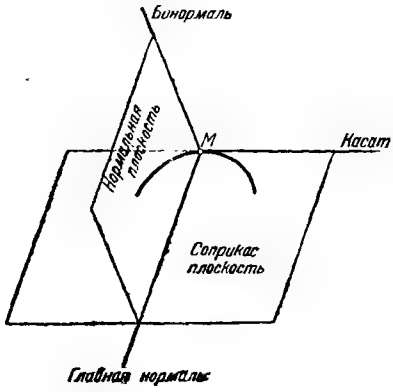
[1]) Отметим, что в исключенном нами случае (236) оба первых члена правой части направлены по касательной, и лишь остаточный член уводит нас в сторону от нее. Таким образом, уклонение кривой от касательной не ниже 3-го порядка малости, касание между ними 2-го порядка, т. е. мы действительно имеем точку распрямления.

или

$$(\mathbf{R}-\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'')=0.$$

В этих формулах x, x', x'' и т. д. взяты при аргументе t, фиксированном на определенном значении, соответственно выбранной точке на кривой. В случае точки распрямления, как видно из (235′), уравнение соприкасающейся плоскости (242′) превращается в тождество.

Добавим, что *соприкасающуюся плоскость в точке M можно построить как предельное положение плоскости, проходящей через три бесконечно близкие точки M_1, M_2, M_3 на кривой, когда эти точки стремятся в M.* Доказательство мы здесь не приводим.



Черт. 59.

С соприкасающейся плоскостью связан ряд других геометрических построений. Прежде всего из бесчисленного множества нормалей в данной точке пространственной кривой, которые нам казались ранее равноценными по своим свойствам, теперь выделяются две особенные.

Нормаль в данной точке, лежащую в соприкасающейся плоскости, мы будем называть главной нормалью, а нормаль, перпендикулярную к соприкасающейся плоскости, — бинормалью (черт. 59).

Соприкасающаяся плоскость берется, разумеется, в той же точке кривой, где строятся нормали. Очевидно, касательная, главная нормаль и бинормаль, выходящие из одной и той же точки кривой, образуют между собой прямые углы.

Составим теперь уравнения главной нормали и бинормали. Начнем с бинормали, так как вектор, перпендикулярный к соприкасающейся плоскости и, следовательно, направленный по бинормали, у нас уже построен. Это — вектор $[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']$ [см. (241)]. В таком случае уравнение бинормали легко построить как уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x, y, z)$ на кривой и параллельной вектору $[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']$ в этой точке. Уравнение это (в форме пропорций) запишется по общим правилам так:

$$\frac{X-x}{y'z''-z'y''}=\frac{Y-y}{z'x''-x'z''}=\frac{Z-z}{x'y''-y'x''}. \qquad (243)$$

Чтобы найти теперь направление главной нормали, составим векторное произведение перпендикуляриых к ней векторов, а именно $\mathbf{r}'$ и $[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']$. Это векторное произведение будет, очевидно, параллельно главной нормали. Вычислим его как двойное векторное произведение:

$$[\mathbf{r}', [\mathbf{r}', \mathbf{r}'']]=\mathbf{r}'(\mathbf{r}'\mathbf{r}'')-\mathbf{r}''(\mathbf{r}'\mathbf{r}').$$

Не представляет труда вычислить координаты этого вектора

$$x'(\mathbf{r}'\mathbf{r}'') - x''(\mathbf{r}'\mathbf{r}'), \quad y'(\mathbf{r}'\mathbf{r}'') - y''(\mathbf{r}'\mathbf{r}'), \quad z'(\mathbf{r}'\mathbf{r}'') - z''(\mathbf{r}'\mathbf{r}')$$

и записать уравнение главной нормали как прямой, проходящей через точку кривой $M(x, y, z)$ параллельно этому вектору.

Основной особенностью результатов этого параграфа по сравнению с предыдущими, относящимися к пространственной кривой, является изучение кривой в бесконечно малом с точностью уже не 1-го (как при построении касательной), а 2-го порядка. С этим связано появление в рассмотрении не только первой, но второй производной радиуса-вектора $\mathbf{r}(t)$, построение соприкасающейся плоскости и т. д.

§ 27. Соприкасающаяся окружность. Трехгранник Френе.

Переходя к более детальному изучению кривой в бесконечно малом все с той же точностью 2-го порядка, будем пользоваться в качестве параметра длиной дуги s. Это упростит и сделает более наглядными все выкладки. Итак, уравнение кривой будет

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s).$$

Выясним сначала, какой вид примут результаты предыдущего параграфа в этом случае. Прежде всего первая производная $\mathbf{r}$ по параметру s, вектор $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}$, будет единичным вектором:

$$\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} = 1.$$

Диференцируя это равенство по s, получим

$$2\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} = 0. \tag{244}$$

Здесь возможны два случая. Если

$$\ddot{\mathbf{r}} \neq 0, \tag{245}$$

то в силу (244) $\ddot{\mathbf{r}}$ перпендикулярно $\dot{\mathbf{r}}$ и, следовательно, заведомо не коллинеарно ему. Соблюдается условие (235).

Если же

$$\ddot{\mathbf{r}} = 0, \tag{246}$$

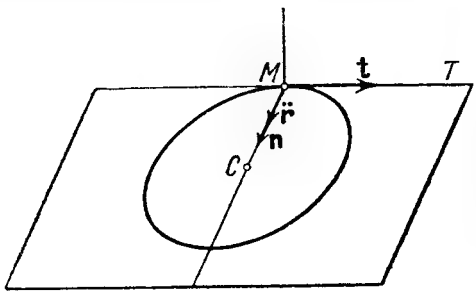
то $\ddot{\mathbf{r}}$ коллинеарен $\dot{\mathbf{r}}$, так как вектор нуль коллинеарен любому другому. Соблюдается условие (236).

Итак, условия (235) и (236) примут соответственно вид (245) и (246). Точки распрямления характеризуются, следовательно, условием (246), и, оставляя попрежнему их в стороне, мы будем считать, что соблюдается неравенство (245).

Векторы $\dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}}$, как частный случай производных $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$ по любому параметру, лежат в соприкасающейся плоскости. Кроме того, в силу

(244) $\ddot{\mathbf{r}}$ направлено перпендикулярно к касательному вектору $\mathbf{t}=\dot{\mathbf{r}}$ и, следовательно, идет по нормали, лежащей в соприкасающейся плоскости, т. е. по главной нормали.

Займемся теперь построением соприкасающейся окружности к пространственной кривой. *Соприкасающейся окружностью* в данной точке M пространственной кривой мы называем *окружность, имеющую с кривой в этой точке касание* 2-го *порядка*. Как известно из § 16, необходимым [1]) и достаточным условием касания 2-го порядка является совпадение для обеих кривых значений $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$ в точке касания. Итак, для искомой окружности значения $\dot{\mathbf{r}}_{\text{окр}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}_{\text{окр}}$ в точке M должны быть те же, что и известные нам $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$ для данной кривой.



Черт. 60.

Воспользовавшись второй из формул (186), мы замечаем, что вектор, соединяющий точку касания M с центром C этой окружности (черт. 60), необходимо должен иметь вид

$$\overline{MC}=\frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\ddot{\mathbf{r}}|^2}. \qquad (247)$$

Тем самым определяется положение центра окружности C; ее радиус, который мы будем обозначать через R, вычисляется так:

$$R=|\overline{MC}|=\frac{|\ddot{\mathbf{r}}|}{|\ddot{\mathbf{r}}|^2}=\frac{1}{|\ddot{\mathbf{r}}|}. \qquad (248)$$

Условие (247), определяющее центр окружности C, однако, не только *необходимо*, но и *достаточно* для того, чтобы любая окружность, описанная радиусом CM из C как из центра, имела, проходя через точку M, общее значение $\ddot{\mathbf{r}}$ с нашей кривой. Действительно, обозначая через $\mathbf{r}_{\text{окр}}$ текущий радиус-вектор такой окружности, мы можем написать для нее формулу (185) в точке M

$$\overline{MC}=\frac{\ddot{\mathbf{r}}_{\text{окр}}}{|\ddot{\mathbf{r}}_{\text{окр}}|^2}.$$

Сопоставляя эту формулу с (247), получим

$$\frac{\ddot{\mathbf{r}}_{\text{окр}}}{|\ddot{\mathbf{r}}_{\text{окр}}|^2}=\frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\ddot{\mathbf{r}}|^2},$$

[1]) После согласования направлений отсчета s, которое мы будем здесь предполагать.

откуда, беря обе части равенства по модулю, убеждаемся в равенстве модулей векторов $\ddot{\mathbf{r}}_{\text{окр}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$, а вслед затем и их самих. Таким образом совпадение значений $\ddot{\mathbf{r}}$ кривой и окружности в точке M равносильно выбору центра окружности C согласно (247).

Что же касается совпадения значений единичного касательного вектора $\dot{\mathbf{r}}$ для окружности и кривой в точке M, то это условие равносильно, очевидно, совпадению касательных в этой точке.

Итак, *для того чтобы окружность была соприкасающейся к данной кривой в точке M, необходимо и достаточно, чтобы центр ее C определялся формулой* (247), *а касательная к ней в точке M совпадала с касательной к кривой.*

Мы видим из (247), что вектор $\overline{MC}$, переводящий нас из точки касания M в центр окружности C, отличается от $\ddot{\mathbf{r}}$ лишь положительным скалярным множителем и направлен, следовательно, по $\ddot{\mathbf{r}}$. Это означает, что $\overline{MC}$ отложится по главной нормали в направлении $\ddot{\mathbf{r}}$; *это направление мы примем за положительное направление главной нормали.*

Итак, центр окружности C расположится на главной нормали в положительном направлении от точки касания M и на расстоянии R от нее, вычисляемом согласно (248). Но в пространстве можно описать бесчисленное множество окружностей, для которых точка C служит центром, а отрезок CM — радиусом. Все эти окружности будут получаться друг из друга вращением около оси CM, касательные к ним всем в точке M будут перпендикулярны к общему радиусу CM, но только для одной из этих окружностей касательная совпадает с касательной MT к кривой, именно, для окружности, лежащей в плоскости CMT. Плоскость CMT содержит касательную MT и главную нормаль MC и является, следовательно, соприкасающейся плоскостью в точке M.

Мы обнаружили, что окружность, удовлетворяющая нашим требованиям, существует и определяется единственным образом. Это будет *окружность, описанная в соприкасающейся плоскости радиусом CM из центра C на положительной половине главной нормали.*

Центр C соприкасающейся окружности называется *центром кривизны*, а ее радиус R — *радиусом кривизны* пространственной кривой в данной точке M [1]).

---

[1]) Роль соприкасающейся окружности заключается в том, что вблизи точки M она представляет нашу кривую с ошибкой бесконечно малой лишь 3-го порядка (не ниже), принимая за бесконечно малое 1-го порядка путь, пройденный из точки касания по кривой (см. определение порядка касания кривых, § 16). Таким образом, если в предыдущем параграфе мы узнали, что в бесконечно малом, пренебрегая бесконечно малыми 3-го порядка, пространственную кривую можно считать плоской (лежащей в своей соприкасающейся плоскости), то теперь мы знаем дополнительно, что в этих условиях ее можно считать дугой окружности (именно соприкасающейся окружности). В связи с этим понятно, почему получилось, что соприкасающаяся окружность лежит в соприкасающейся плоскости. Понятно также, что, пользуясь при изучении пространственной кривой в беско-

Трехгранник Френе.

Введем теперь некоторые понятия, связанные с соприкасающейся плоскостью и соприкасающейся окружностью. У нас уже имеется единичный вектор

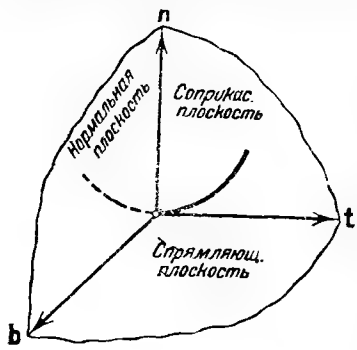
$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}, \tag{249}$$

направленный по касательной. Построим единичный вектор $\mathbf{n}$, направленный в положительном направлении главной нормали, т. е. в направлении вектора $\ddot{\mathbf{r}}$. Для этого нужно, как известно, разделить вектор $\ddot{\mathbf{r}}$ на его модуль, так что

$$\mathbf{n} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\ddot{\mathbf{r}}|}. \tag{250}$$

Построим также векторное произведение единичных взаимно ортогональных векторов $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, которое обозначим через $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{b} = [\mathbf{t}, \mathbf{n}]. \tag{251}$$



Черт. 61.

Очевидно, $\mathbf{b}$ также единичный вектор, направленный перпендикулярно к плоскости векторов $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, т. е. перпендикулярно соприкасающейся плоскости, а значит, параллельно бинормали.

По трем основным взаимно ортогональным направлениям, связанным с каждой точкой кривой, — касательной, нормали и бинормали, — мы построили, таким образом, единичные векторы $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$. Эти три вектора образуют *трехгранник Френе*. Плоскость $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ соприкасающаяся, плоскость $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ нормальная, и наконец плоскость $\mathbf{b}$, $\mathbf{t}$ мы будем называть *спрямляющей* (черт. 61). Трехгранник Френе будет играть в дальнейшем большую роль в связи с тем, что он как бы определяет в каждой точке кривой местную прямоугольную систему координат с ортами $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, геометрически прилаженную к кривой в этой точке. Действительно, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ определяются вполне поведением самой кривой, если не считать незначительно малом лишь первой и второй производными радиуса-вектора $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$, мы повторяем в сущности построения теории плоских кривых. Действительно, раз мы рассматриваем в данной точке только $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$, то мы знаем в разложении вектор-функции $\mathbf{r}$ в ряд Тэйлора вблизи данной точки лишь члены 1-й и 2-й степени. Но пренебрегая в бесконечно малом членами 3-й степени и выше, мы можем считать кривую расположенной в ее соприкасающейся плоскости, и нам приходится повторять построения теории плоских кривых, заменив только плоскость кривой ее соприкасающейся плоскостью в данной точке. Существенные особенности пространственных кривых скажутся позже когда мы привлечем в рассмотрение $\dddot{\mathbf{r}}$, т. е. повысим точность исследования до 3-го порядка.

ного произвола, связанного с изменением направления отсчета дуги s на кривой. Если изменить это направление на обратное, то параметр s меняет знак на обратный, и вектор $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ изменит направление на обратное в силу изменения знака у ds. Что же касается $\ddot{\mathbf{r}}$, то

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{ds}$$

и так как $d\mathbf{t}$ и ds оба меняют знаки, то $\ddot{\mathbf{r}}$, а вместе с ним и $\mathbf{n}$, не меняется. Наконец, в векторном произведении (251) первый множитель меняет направление на обратное, второй же не меняется; следовательно, $\mathbf{b}$ переходит в $-\mathbf{b}$.

Итак, при переходе от s к $-s$ $\mathbf{t}$ переходит в $-\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ переходит в $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ переходит в $-\mathbf{b}$.

Введя в рассмотрение вектор $\mathbf{n}$, можно переписать формулу для отыскания центра кривизны в том виде, в котором мы будем обычно ею пользоваться. Так как длина вектора $\overline{MC}$ есть радиус кривизны R, то

$$\overline{MC} = R\mathbf{n}. \tag{252}$$

Действительно, $\overline{MC}$ (как и всякий вектор) равен своему модулю R, умноженному на единичный вектор в том же самом направлении, т. е. в положительном направлении главной нормали (черт. 60). Этот единичный вектор мы обозначили через $\mathbf{n}$.

Формулу (252) можно получить и непосредственно, перемножив почленно равенства (250) и (248) и сравнив результат с равенством (247).

Заметим, что соприкасающаяся окружность в точке M на кривой может быть построена и другим путем, именно как предельное положение окружности, проведенной через три точки M_1, M_2, M_3 на кривой, когда эти точки стремятся в точку M. Доказательство этой теоремы довольно формальное, и мы оставляем его в стороне [1]).

---

[1]) Результаты этого параграфа неприменимы, конечно, к точкам распрямления, так как в последних $\ddot{\mathbf{r}} = 0$, и основные формулы (247), (248), (250) теряют смысл. Соприкасающаяся плоскость, главная нормаль и бинормаль в том смысле, как мы их определили, в точке распрямления становятся неопределенными. Впрочем для них, как можно показать, существуют *предельные* положения, когда, двигаясь по кривой, мы стремимся в точку распрямления. Эти предельные положения можно принять за соприкасающуюся плоскость, главную нормаль и бинормаль в точке распрямления. Нужно иметь при этом в виду, что положительное направление на главной нормали может скачком измениться на противоположное при переходе через точку распрямления.

Что же касается соприкасающейся окружности, то она вырождается в прямую (касательную). Точнее, окружности, имеющей с кривой касание 2-го порядка, в точке распрямления не существует, зато касательная там имеет с кривой касание 2-го порядка.

§ 28. Кривизна.

Докажем прежде всего некоторые леммы. Первой из них мы фактически уже пользовались; формулируем ее теперь самостоятельно для удобства ссылок в дальнейшем. *Если вектор-функция* $\mathbf{m}$ *от скалярного аргумента* t *сохраняет постоянный модуль, то при каждом значении* t *ее производная ей перпендикулярна.*

Так как квадрат модуля вектора равен скалярному квадрату самого вектора, то мы можем записать

$$|\mathbf{m}(t)|^2 = \mathbf{m}(t)^2 = \text{const}.$$

Диференцируя по t, получим

$$2\mathbf{m}(t)\,\mathbf{m}'(t) = 0, \tag{253}$$

откуда и следует, что $\mathbf{m}'(t)$ перпендикулярно $\mathbf{m}(t)$.

Очень полезно наглядно представить себе геометрический смысл этой леммы. Если откладывать $\mathbf{m}(t)$ из неизменной точки O, то вектор $\mathbf{m}(t)$ будет меняться лишь по направлению, но не по длине, и конец его опишет кривую, лежащую на сфере с центром O. Как известно из предыдущего, производная $\mathbf{m}'(t)$ будет при каждом значении t направлена по касательной к этой кривой, следовательно, по касательной к сфере и, значит, она будет перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания, т. е. вектору $\mathbf{m}(t)$.

В частности, лемма имеет место для единичных векторов; это для нас и будет особенно важно в дальнейшем.

Другая лемма относится к полю единичного вектора вдоль какой-нибудь кривой. Пусть даны две вектор-функции:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s),$$

определяющая радиус-вектор некоторой пространственной кривой как функцию длины дуги вдоль кривой, и

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(s), \quad |\mathbf{m}| = 1,$$

указывающая для каждого значения s, т. е. для каждой точки кривой, значение единичного вектора $\mathbf{m}$. Наглядно мы можем представить себе, что в каждой точке кривой задан единичный вектор $\mathbf{m}$, меняющий от точки к точке свое направление по определенному закону.

Введем *понятие о скорости вращения вектора* $\mathbf{m}(s)$ *по отношению к пути, пройденному по кривой точкой его приложения.* Для этой скорости, которая будет иметь, вообще говоря, различные значения в разных точках кривой, мы даем следующее определение. Перейдем из данной точки s на кривой в какую-нибудь другую точку $s + \Delta s$ и возьмем угол $\Delta\varphi$, образуемый векторами $\mathbf{m}(s)$ и $\mathbf{m}(s + \Delta s)$ (перенеся их для наглядности в общую точку приложения O) [1]). Составим отношение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$, показывающее, какой угол поворота вектора $\mathbf{m}$ приходится

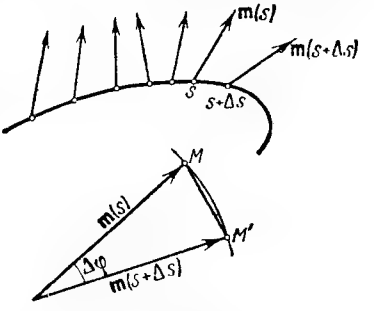
[1]) Угол $\Delta\varphi$ не является приращением какой-то функции φ, как можно было бы подумать, судя по обозначению.

в среднем на единицу пройденного пути по кривой, когда мы смещаемся из точки s в точку $s+\Delta s$ (в этом отношении Δs и $\Delta\varphi$ берутся по модулю). Заставим теперь Δs стремиться к нулю; рассматриваемый отрезок кривой стягивается в точку s, и *предел отношения* $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ *называется скоростью вращения* вектора $\mathbf{m}$ в данной точке s по отношению к пути, проходимому по кривой.

Лемма, которую мы сейчас докажем, утверждает, что *предел отношения* $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ *в каждой точке* s *существует и равен модулю производной вектора* $\mathbf{m}$ *по* s.

Опишем из точки O как из центра окружность единичного радиуса, проходящую через концы векторов $\mathbf{m}(s)$ и $\mathbf{m}(s+\Delta s)$, т. е. точки M и M' (черт. 62). Очевидно, что угол между векторами численно равен длине дуги $\overset{\smile}{MM'}$. Мы можем записать

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\frac{\overset{\smile}{MM'}}{\Delta s}=\frac{MM'}{\Delta s}\cdot\frac{\overset{\smile}{MM'}}{MM'}.$$



Черт. 62.

Здесь MM' означает длину хорды MM'. Но очевидно, что

$$\mathbf{m}(s+\Delta s)-\mathbf{m}(s)=\overline{MM'},$$

так что длина хорды MM' равна модулю приращения вектора $\mathbf{m}(s)$:

$$MM'=|\overline{MM'}|=|\mathbf{m}(s+\Delta s)-\mathbf{m}(s)|.$$

Перепишем теперь выражение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ в виде

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\left|\frac{\mathbf{m}(s+\Delta s)-\mathbf{m}(s)}{\Delta s}\right|\frac{\overset{\smile}{MM'}}{MM'}.$$

Мы внесли Δs под знак модуля на том основании, что Δs предполагается взятым по модулю. Заставим теперь Δs стремиться к нулю. Вектор, стоящий в правой части, стремится, очевидно, к производной $\dot{\mathbf{m}}(s)$, а его модуль — к модулю $|\dot{\mathbf{m}}(s)|$. Отношение же дуги окружности $\overset{\smile}{MM'}$ к стягивающей ее хорде MM' стремится к единице, когда дуга стремится к нулю. Итак, мы получаем

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\underset{\Delta s\to 0}{\to}|\dot{\mathbf{m}}(s)|. \tag{254}$$

Этим вторая лемма доказана.

Введем теперь понятие *кривизны в данной точке пространственной кривой*. Вдоль пространственной кривой

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$$

в каждой точке определяется единичный касательный вектор

$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}(s).$$

Скорость вращения вектора $\mathbf{t}$ (*или, что то же, скорость вращения касательной*) *в данной точке кривой по отношению к пути, проходимому по кривой, мы называем кривизной* k *в данной точке.*

Очевидно, ранее введенное определение кривизны для плоской кривой является частным случаем этого определения.

Применяя предыдущую лемму (254) к вектору $\mathbf{t}(s)$, можно записать

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \to |\dot{\mathbf{t}}| \quad \text{при} \quad \Delta s \to 0,$$

где Δs — путь, пройденный по кривой, исходя из данной точки, а $\Delta\varphi$ — угол соответствующего поворота касательной $\mathbf{t}$. Следовательно, скорость вращения касательной в данной точке равна $|\dot{\mathbf{t}}|$, и мы можем записать

$$k = |\dot{\mathbf{t}}|. \tag{255}$$

А так как $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}$, то

$$k = |\ddot{\mathbf{r}}|. \tag{255'}$$

Мы замечаем, во-первых, что вообще $k \geqslant 0$, причем условие (246), характеризующее точки распрямления, может быть переписано в виде

$$k = 0. \tag{256}$$

Итак, точки распрямления тождественны с точками нулевой кривизны, и условия (256), (246), (236) равносильны между собой. Признак (256) в случае плоских кривых был выведен нами в конце § 19.

Уже полученный в начале § 26 результат о линии, сплошь состоящей из точек распрямления, можно теперь доказать снова в виде теоремы:

Для того чтобы линия была прямой, необходимо и достаточно, чтобы ее кривизна во всех точках была равна нулю.

Необходимость очевидна, так как вдоль прямой вектор $\mathbf{t}$ остается постоянным, сохраняя направление по прямой и длину единица. В таком случае $\dot{\mathbf{t}} = 0$, и формула (255) приводит к обращению кривизны k в нуль.

Достаточность. Если $k = 0$, то (255) показывает, что $\dot{\mathbf{t}} = 0$, а значит, $\mathbf{t}$ сохраняет постоянное значение. Интегрируя равенство

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{t}$$

или

$$d\mathbf{r} = \mathbf{t}\, ds,$$

где $\mathbf{t}$ остается постоянным, получим

$$\mathbf{r} = \mathbf{t}s + \mathbf{r}_0.$$

Здесь $\mathbf{r}_0$ — постоянный вектор интегрирования. Очевидно, что при переменном s конец вектора $\mathbf{r}$ описывает прямую.

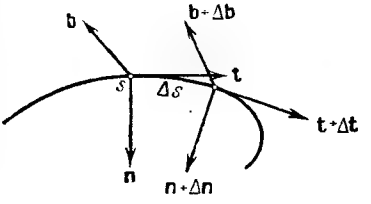
Далее, оставляя, как обычно, в стороне точки распрямления, сопоставим (255′) и (248). Получим

$$k = \frac{1}{R}, \tag{257}$$

т. е. *кривизна и радиус кривизны суть взаимно обратные величины.* Эта теорема обобщает на пространство соответствующий результат [§ 19, (196)] для плоской кривой. Пояснение смысла этого соотношения, данное там, применимо и для пространственных кривых.

§ 29. Формулы Френе. Кручение.

Основной смысл формул Френе состоит в том, чтобы характеризовать вращение трехгранника Френе $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ при движении точки касания вдоль пространственной кривой. Действительно, так как $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ — единичные взаимно ортогональные векторы, то при бесконечно малом смещении точки касания вдоль кривой эта тройка может лишь повернуться как твердое тело (на изменение точки приложения мы внимания не обращаем) (черт. 63). Мы займемся сначала аналитическим выражением этой идеи, к кинематическому же истолкованию вернемся позже.



Черт. 63.

Считая кривую отнесенной к параметру s,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s),$$

причем k нигде не обращается в нуль, мы, очевидно, можем и векторы трехгранника Френе считать однозначно определенными функциями s [см. (249), (250), (251)]

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(s), \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}(s), \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}(s).$$

Аналитическое содержание формул Френе будет заключаться в разложении производных от векторов $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ по дуге s, т. е. $\dot{\mathbf{t}}$, $\dot{\mathbf{n}}$, $\dot{\mathbf{b}}$, по самим этим векторам.

Легче всего выразить производную $\dot{\mathbf{t}}$. Мы знаем, что так как $\dot{\mathbf{t}} = \ddot{\mathbf{r}}$, то этот вектор направлен в каждой точке по главной нормали в положительном направлении, другими словами, в направлении вектора $\mathbf{n}$. Что же касается его модуля, то он равен кривизне, как показывает (255). Следовательно, вектор $\dot{\mathbf{t}}$, как и всякий вектор, равен своему модулю, умноженному на единичный вектор в том же направлении:

$$\dot{\mathbf{t}} = k\mathbf{n}. \tag{258}$$

Это и есть *первая формула Френе.*

Займемся теперь дифференцированием вектора $\mathbf{b}(s)$. Запишем определение вектора $\mathbf{b}(s)$:

$$\mathbf{b} = [\mathbf{t}, \mathbf{n}],$$

и продифференцируем это равенство почленно по s. Получим

$$\dot{\mathbf{b}} = [\dot{\mathbf{t}}, \mathbf{n}] + [\mathbf{t}, \dot{\mathbf{n}}].$$

В первой части первый член обращается в нуль, так как первый множитель векторного произведения $\dot{\mathbf{t}}$ коллинеарен второму, $\mathbf{n}$, как показывает (258). Итак,

$$\dot{\mathbf{b}} = [\mathbf{t}, \dot{\mathbf{n}}].$$

Так как $\mathbf{n}$ — вектор единичный, то его производная $\dot{\mathbf{n}}$ перпендикулярна ему; кроме того, вектор $\mathbf{t}$ также ему перпендикулярен. Следовательно, векторное произведение $\mathbf{t}$ на $\dot{\mathbf{n}}$, перпендикулярное к обоим этим векторам, будет направлено параллельно $\mathbf{n}$ и будет отличаться от $\mathbf{n}$ только некоторым скалярным коэфициентом. Этот коэфициент, взятый с обратным знаком, мы обозначим через $\varkappa$. Тогда векторное произведение $[\mathbf{t}, \dot{\mathbf{n}}]$ равно $-\varkappa\mathbf{n}$ и мы можем записать

$$\dot{\mathbf{b}} = -\varkappa\mathbf{n}. \tag{259}$$

Это есть *третья формула Френе* (вторую еще предстоит вывести). Коэфициент $\varkappa$ в каждой точке определяется, очевидно, единственным образом, включая и знак (в отличие от коэфициента кривизны k, который по самому определению кривизны всегда положителен).

Значение коэфициента $\varkappa$ в данной точке кривой мы будем называть кручением кривой в этой точке. Геометрический смысл кручения мы выясним несколько позже.

Так как векторы $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ образуют тройку единичных взаимно ортогональных векторов, то в равенстве, определяющем

$$\mathbf{b} = [\mathbf{t}, \mathbf{n}], \tag{260}$$

можно делать круговую подстановку:

$$\mathbf{t} = [\mathbf{n}, \mathbf{b}], \tag{260'}$$

$$\mathbf{n} = [\mathbf{b}, \mathbf{t}]. \tag{260''}$$

Продифференцируем по s последнее равенство:

$$\dot{\mathbf{n}} = [\dot{\mathbf{b}}, \mathbf{t}] + [\mathbf{b}, \dot{\mathbf{t}}].$$

Подставим сюда выражения $\dot{\mathbf{b}}$ и $\dot{\mathbf{t}}$ из (259) и (258). Получим

$$\dot{\mathbf{n}} = [-\varkappa\mathbf{n}, \mathbf{t}] + [\mathbf{b}, k\mathbf{n}].$$

Пользуясь формулами (260) и (260′), векторные произведения $[\mathbf{n}, \mathbf{t}]$ и $[\mathbf{b}, \mathbf{n}]$ можно заменить через $-\mathbf{b}$ и $-\mathbf{t}$, и выражение для $\dot{\mathbf{n}}$ принимает окончательную форму

$$\dot{\mathbf{n}} = \varkappa\mathbf{b} - k\mathbf{t}. \tag{261}$$

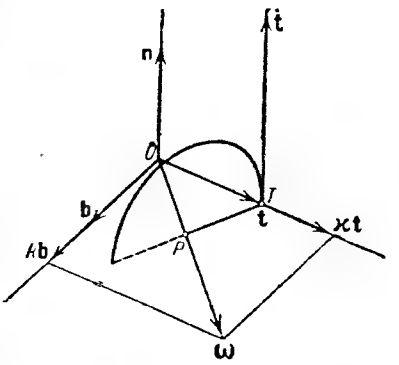
Мы получили *вторую формулу Френе*. Сделаем сводку всех формул Френе:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathbf{t}} &= k\mathbf{n}, \\ \dot{\mathbf{n}} &= \varkappa\mathbf{b} - k\mathbf{t}, \\ \dot{\mathbf{b}} &= -\varkappa\mathbf{n}. \end{aligned}\right\} \tag{262}$$

Производные $\dot{\mathbf{t}}$, $\dot{\mathbf{n}}$, $\dot{\mathbf{b}}$ по длине дуги s в данной точке разложены, как мы видим, по самим $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ с коэфициентами $\pm k$, $\pm\varkappa$. Интересно отметить, что если в каждом разложении писать на первом месте член с $\mathbf{t}$, потом с $\mathbf{n}$, потом с $\mathbf{b}$, то матрица коэфициентов разложений (262) примет вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \varkappa \\ 0 & -\varkappa & 0 \end{Vmatrix}. \tag{262′}$$

Чтобы уяснить себе кинематический смысл формул Френе, представим себе, что векторы трехгранника $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ откладываются из фиксированной точки O, так что когда мы движемся по кривой, меняя аргумент s, трехгранник вращается как твердое тело около O.



Черт. 64.

Так как каждому значению s отвечает определенное положение трехгранника, то можно, перейдя в область кинематики, условно истолковать s как время. Тогда, как мы сейчас увидим, при каждом значении s („в каждый момент времени“) для трехгранника можно указать определенный вектор мгновенной угловой скорости. Это значит, что точки трехгранника в этот момент обладают такими скоростями, как если бы он вращался около оси, направленной по некоторому вектору $\boldsymbol{\omega}$ с угловой скоростью $|\boldsymbol{\omega}|$ и притом в направлении против часовой стрелки, если смотреть вдоль оси с конца вектора $\boldsymbol{\omega}$ к его началу (черт. 64).

Возьмем сначала какой-нибудь *произвольно выбранный* вектор $\boldsymbol{\omega}$ и заставим трехгранник вращаться около оси, параллельной вектору $\boldsymbol{\omega}$, с угловой скоростью $|\boldsymbol{\omega}|$, т. е. так, чтобы угол поворота был пропорционален приращению „времени“ s с коэфициентом пропорциональности $|\boldsymbol{\omega}|$. Направление вращения пусть согласовано с направлением $\boldsymbol{\omega}$, как указано выше.

Вычислим скорость движения точки T, лежащей в конце вектора $\mathbf{t}$. Так как для T вектор $\mathbf{t}$ служит радиус-вектором, то, считая s временем, мы должны принять за вектор скорости производную $\dot{\mathbf{t}}$. С другой стороны, считая, что трехгранник вращается около оси $\boldsymbol{\omega}$, мы видим, что T движется по окружности радиуса PT

$$PT = \sin(\widehat{\boldsymbol{\omega}, \mathbf{t}}),$$

где TP — перпендикуляр, опущенный из T на ось вращения. Считая, кроме того, что угловая скорость вращения есть $|\boldsymbol{\omega}|$, мы получаем для линейной скорости движения T произведение радиуса окружности на угловую скорость

$$|\boldsymbol{\omega}| \cdot \sin(\widehat{\boldsymbol{\omega}, \mathbf{t}}).$$

В самом деле, угловая скорость выражает угол поворота за единицу времени; значит, умноженная на радиус окружности, она дает путь, пройденный точкой T по окружности за единицу времени.

Что же касается линейной скорости движения T, то она направлена по касательной к окружности и перпендикулярна, следовательно, к радиусу окружности PT и к оси вращения $\boldsymbol{\omega}$ (черт. 64).

В итоге скорость движения T как вектор направлена перпендикулярно плоскости векторов $\mathbf{t}$, $\boldsymbol{\omega}$ и имеет модуль, равный произведению произведения модулей этих векторов $1 \cdot |\boldsymbol{\omega}|$ на синус угла между ними. Итак, эта скорость есть векторное произведение $\boldsymbol{\omega}$ на $\mathbf{t}$; нетрудно убедиться, что множители нужно брать именно в этом порядке, чтобы получить нужное направление скорости. Сопоставляя оба выражения, полученные для скорости движения конца вектора $\mathbf{t}$, получим

$$\dot{\mathbf{t}} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{t}]$$

и совершенно аналогично

$$\dot{\mathbf{n}} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}],$$

$$\dot{\mathbf{b}} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{b}].$$

Разложим вектор мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ по векторам $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, обозначая коэфициенты разложения через α, β, γ:

$$\boldsymbol{\omega} = \alpha\mathbf{t} + \beta\mathbf{n} + \gamma\mathbf{b}. \tag{263}$$

Вставим это разложение $\boldsymbol{\omega}$ в предшествующие формулы; пользуясь равенствами (260), (260′) и (260″), получаем

$$\dot{\mathbf{t}} = 0 - \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{n},$$

$$\dot{\mathbf{n}} = \alpha\mathbf{b} + 0 - \gamma\mathbf{t},$$

$$\dot{\mathbf{b}} = -\alpha\mathbf{n} + \beta\mathbf{t} + 0.$$

До сих пор вектор $\boldsymbol{\omega}$ был выбран произвольно. Постараемся теперь выбрать его так, чтобы скорости движения концов $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ при вращении, определяемом вектором $\boldsymbol{\omega}$, совпадали с теми скоростями, ко-

торые концы векторов **t**, **n**, **b** имеют фактически согласно формулам Френе. Для этого необходимо и достаточно, чтобы только что выписанные формулы совпадали с формулами Френе (262), т. е. чтобы выполнялись равенства

$$\alpha = \varkappa, \quad \beta = 0, \quad \gamma = k$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{\omega} = \varkappa \mathbf{t} + k\mathbf{b}. \tag{264}$$

Итак, найден такой вектор $\boldsymbol{\omega}$, именно, заданный формулой (264), что определяемое им вращение трехгранника сообщает концам векторов **t**, **n**, **b** те же линейные скорости по отношению к s, которыми они обладают в данный момент фактически.

Теперь кинематический смысл формул Френе ясен. Они показывают нам, что при каждом данном значении s *трехгранник Френе вращается как твердое тело с вектором мгновенной угловой скорости* (264), *причем скорость берется по отношению к проходимому по кривой пути* s (который играет, таким образом, роль времени).

Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ лежит, как мы видим, в плоскости **t**, **b** и разлагается лишь на два составляющих $\varkappa\mathbf{t}$ и $k\mathbf{b}$, так что вращение трехгранника в данный момент слагается, можно считать, из двух вращений.

Одно вращение отвечает слагаемому $k\mathbf{b}$. Оно происходит, по определению вектора мгновенной угловой скорости, около оси, направленной по $k\mathbf{b}$, и с угловой скоростью, равной $|k\mathbf{b}|$, т. е. *около бинормали и с угловой скоростью* k.

Направление этого вращения будет всегда от **t** к **n**, так как $k > 0$ и $k\mathbf{b}$ направлено в сторону **b**, следовательно, с конца $k\mathbf{b}$ вращение от **t** к **n** как раз представляется идущим против часовой стрелки (мы везде пользуемся правой системой координат и правым векторным произведением).

Другое вращение отвечает слагаемому $\varkappa\mathbf{t}$. Оно происходит около оси, направленной по $\varkappa\mathbf{t}$, и с угловой скоростью, равной $|\varkappa\mathbf{t}|$, т. е. *около касательной и с угловой скоростью* $|\varkappa|$.

Что же касается направления этого вращения, то оно зависит от знака $\varkappa$. В случае $\varkappa > 0$ вектор $\varkappa\mathbf{t}$ направлен в сторону **t** и вращение происходит от **n** к **b**, так как именно такое вращение представляется идущим против часовой стрелки, если смотреть с конца **t**. В случае $\varkappa < 0$ вектор $\varkappa\mathbf{t}$ направлен в обратную сторону и вращение происходит от **b** к **n**.

На это обстоятельство следует обратить внимание, так как оно характеризует геометрический смысл *знака кручения* $\varkappa$.

Необходимо пояснить, что, говоря о направлении вращения трехгранника, мы предполагаем, что по кривой мы движемся *в сторону возрастания* s. Действительно, мы исходили из кинематического истолкования, где s играет роль времени и, следовательно, в своем изменении считается возрастающим.

Теперь интересно проследить, что происходит, когда мы направление отсчета дуги s изменим на обратное. Тогда при возрастании

s мы будем двигаться в обратную сторону и, следовательно, вращение трехгранника будет происходить в *обратном направлении*. Но так как при этом обратном отсчете дуги s в трехграннике Френе $\mathbf{t}$ и $\mathbf{b}$ изменят направление на обратное, а $\mathbf{n}$ останется прежним (см. § 27, стр. 145), то вращение от $\mathbf{t}$ к $\mathbf{n}$ и вращение от $\mathbf{n}$ к $\mathbf{b}$ будут теперь иметь направления, *тоже обратные прежним*. Поэтому, если раньше вращение трехгранника около касательной имело направление, совпадающее с направлением вращения от $\mathbf{n}$ к $\mathbf{b}$, т. е. если $\varkappa$ было > 0, то и теперь, при обратном отсчете дуги s, будет в точности то же самое. Это же относится, конечно, и к случаю $\varkappa < 0$. Следовательно, *не только модуль* (*что очевидно*), *но и знак кручения* $\varkappa$ *не зависит от выбора направления отсчета* s *вдоль кривой*. Кручение $\varkappa$ характеризует геометрические свойства самой кривой в данной точке независимо от направления отсчета дуги на ней.

Это легко проверить и непосредственно из третьей формулы Френе. Действительно, при изменении направления отсчета дуги на обратное, левая часть формулы (259) не меняется, так как $\mathbf{b}$ и s одновременно меняют знак на обратный; а так как $\mathbf{n}$ тоже не меняется, то и коэфициент $\varkappa$ остается прежним.

Нам нужно, наконец, остановиться на *геометрическом смысле кручения* $\varkappa$. Оно, собственно, уже получило у нас истолкование, включая и знак, как угловая скорость вращения трехгранника вокруг касательной.

Этому истолкованию в части, касающейся модуля $\varkappa$, можно придать более простой вид.

Возьмем по модулю обе части третьей формулы Френе:

$$|\dot{\mathbf{b}}| = |-\varkappa\mathbf{n}| = |\varkappa|, \quad \text{так как} \quad |\mathbf{n}| = 1.$$

Рассматривая вектор-функцию $\mathbf{b}(s)$ как частный случай векторного поля $\mathbf{m}(s)$, заданного вдоль кривой (см. вторую лемму начала § 28), мы можем переписать формулу (254) в виде

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}_{\Delta s \to 0} \to |\dot{\mathbf{b}}| \quad \text{и, значит,} \quad \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}_{\Delta s \to 0} \to |\varkappa|.$$

Здесь $\Delta\varphi$ означает угол между двумя бинормалями, отстоящими вдоль кривой на расстоянии Δs. Предел отношения $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$, когда вторая бинормаль стремится к совпадению с первой, мы называем *скоростью вращения бинормали в соответствующей точке по отношению к пути, проходимому по кривой*. Мы видим, что *эта скорость равна модулю кручения* $|\varkappa|$ в той же точке. Таково геометрическое истолкование модуля кручения. Но так как бинормали перпендикулярны к соприкасающимся плоскостям, то угол между бинормалями в двух точках кривой равен углу между соприкасающимися плоскостями в тех же точках. Следовательно, повторяя те же рассуждения, можно сказать, что $|\varkappa|$ есть в то же время *скорость вращения соприкасающейся плоскости по отношению к пути* s, *проходимому по кривой*.

В заключение докажем теорему, хорошо выясняющую роль кручения пространственной кривой.

Очевидно прежде всего, что, так как для *плоской кривой* соприкасающаяся плоскость во всех точках одна и та же, именно плоскость самой кривой, то бинормали все параллельны друг другу, а векторы $\mathbf{b}$ во всех точках равны между собой. Отсюда скорость вращения бинормали равна нулю, и следовательно,

$$\varkappa = 0.$$

Это можно видеть и прямо из третьей формулы Френе

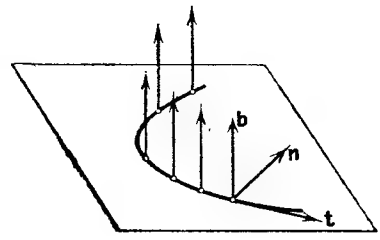
$$\dot{\mathbf{b}} = -\varkappa\mathbf{n}.$$

Действительно, производная от постоянного $\mathbf{b}$ равна нулю, а так как $\mathbf{n}$ заведомо отлично от нуля, то обращается в нуль кручение $\varkappa$.

Итак, *если кривая плоская, то кручение* $\varkappa$ *во всех точках равно нулю.* Несколько менее очевидна обратная теорема, которую мы сейчас докажем:

Если кручение $\varkappa$ *во всех точках равно нулю, то кривая плоская.*

Поскольку кручение $\varkappa$ равно нулю, третья формула Френе показывает, что $\dot{\mathbf{b}} = 0$. Так как производная вектор-функции $\mathbf{b}(s)$ тождественно равна нулю, то и производные всех ее координат тоже нули, следовательно, эти координаты и сама вектор-функция остаются постоянными:



Черт. 65.

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0.$$

Итак, все бинормали параллельны между собой (черт. 65). Но касательная в любой точке перпендикулярна к бинормали, следовательно, все касательные нашей кривой перпендикулярны к постоянному $\mathbf{b}_0$. Запишем это:

$$\mathbf{t}\mathbf{b}_0 = 0 \quad \text{или} \quad \dot{\mathbf{r}}\mathbf{b}_0 = 0.$$

Умножая обе части последнего равенства на ds, получим

$$d\mathbf{r}\,\mathbf{b}_0 = 0 \quad \text{или} \quad d(\mathbf{r}\mathbf{b}_0) = 0.$$

Следовательно,

$$\mathbf{r}\mathbf{b}_0 = D,$$

где D — постоянная. Обозначим через A, B, C координаты $\mathbf{b}_0$, через x, y, z — координаты $\mathbf{r}$, т. е. текущие координаты по кривой. Тогда

$$\mathbf{r}\mathbf{b}_0 = Ax + By + Cz = D.$$

Текущие координаты по кривой удовлетворяют уравнению некоторой лоскости, на которой и расположится, следовательно, наша кривая.

§ 30. Вычислительные формулы для кривизны и кручения.

В предыдущем параграфе мы впервые перешли к рассмотрению кривой вблизи данной точки с точностью 3-го порядка, т. е. учитывая бесконечно малые 1-го, 2-го и 3-го порядков. Действительно, если для построения трехгранника $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ и кривизны k нам было достаточно знать в данной точке лишь первую и вторую производные $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$ радиуса-вектора $\mathbf{r}$ по дуге s, то в формулах Френе при диференцировании $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ по s (и, следовательно, в выражении для $\varkappa$) должна появиться и третья производная $\dddot{\mathbf{r}}$. Но знать $\dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}}$, $\dddot{\mathbf{r}}$ в данной точке кривой $s = s_0$ все равно, что знать разложение $\mathbf{r}(s)$ в ряд Тэйлора по степеням $s - s_0$ до членов третьей степени включительно. В бесконечно малом вблизи данной точки s_0, т. е. при s, стремящемся к s_0, это равносильно рассмотрению кривой с точностью 3-го порядка.

Сейчас мы фактически покажем зависимость между $\dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}}$, $\dddot{\mathbf{r}}$, с одной стороны, и $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, k, $\varkappa$ — с другой. Эти зависимости одновременно будут служить и вычислительными формулами, позволяющими находить все рассмотренные нами величины, исходя из последовательных производных $\dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}}$, $\dddot{\mathbf{r}}$ радиуса-вектора $\mathbf{r}$ кривой по дуге s.

Прежде всего $\mathbf{t}$ по определению совпадает с первой производной $\dot{\mathbf{r}}$:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{t}. \tag{265}$$

Диференцируем по s и пользуемся первой формулой (262):

$$\ddot{\mathbf{r}} = k\mathbf{n}. \tag{266}$$

Еще раз диференцируем по s и пользуемся второй формулой (262):

$$\dddot{\mathbf{r}} = \dot{k}\mathbf{n} + k\dot{\mathbf{n}} = \dot{k}\mathbf{n} + k(\varkappa\mathbf{b} - k\mathbf{t}).$$

Окончательно

$$\dddot{\mathbf{r}} = -k^2\mathbf{t} + \dot{k}\mathbf{n} + k\varkappa\mathbf{b}. \tag{267}$$

Теперь выразим обратно $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, k, $\varkappa$ через $\dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}}$, $\dddot{\mathbf{r}}$. Беря обе части (266) по модулю, приходим к уже известной формуле

$$k = |\ddot{\mathbf{r}}|, \tag{268}$$

так как $|\mathbf{n}| = 1$.

Вставляя это выражение k в (266), получаем формулу

$$\mathbf{n} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\ddot{\mathbf{r}}|}, \tag{269}$$

также ранее известную.

Перемножая векторно равенства (265) и (266) почленно, получим

$$[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}] = k\mathbf{b}, \tag{270}$$

так как $[\mathbf{t}, \mathbf{n}] = \mathbf{b}$. Отсюда, пользуясь равенством (268), легко выразить $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{b} = \frac{[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]}{|\ddot{\mathbf{r}}|}. \tag{270'}$$

Перемножим скалярно равенства (267) и (270) почленно. Получим (учитывая, что $\mathbf{tb} = 0$, $\mathbf{nb} = 0$, $\mathbf{b}^2 = 1$)

$$(\dot{\mathbf{r}}\ \ddot{\mathbf{r}}\ \dddot{\mathbf{r}}) = k^2\varkappa, \tag{271}$$

где в левой части стоит смешанное произведение. Отсюда легко выразить $\varkappa$, учитывая, что $k^2 = |\ddot{\mathbf{r}}|^2 = \ddot{\mathbf{r}}^2$. Получим

$$\varkappa = \frac{(\dot{\mathbf{r}}\ \ddot{\mathbf{r}}\ \dddot{\mathbf{r}})}{\ddot{\mathbf{r}}^2}. \tag{271'}$$

Практически задание вектор-функции $\mathbf{r}(s)$ означает обычно задание ее координат (текущих координат по кривой) в функции параметра s вдоль кривой:

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} + z(s)\,\mathbf{k}.$$

Поэтому имеет смысл выразить предыдущие формулы через текущие координаты и их производные. Диференцируя почленно, мы получаем

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k},$$
$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k},$$
$$\dddot{\mathbf{r}} = \dddot{x}\mathbf{i} + \dddot{y}\mathbf{j} + \dddot{z}\mathbf{k}.$$

Формулу (268) можно теперь переписать (пользуясь известным выражением для модуля вектора через координаты) в виде

$$k = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \tag{272}$$

Формула (271'), если переписать смешанное произведение в виде определителя, примет вид

$$\varkappa = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \tag{273}$$

Перепишем также выражения для t, n, b:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{t} &= \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}, \\ \mathbf{n} &= \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}}\mathbf{i} + \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}}\mathbf{j} + \frac{\ddot{z}}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}}\mathbf{k}, \\ \mathbf{b} &= \frac{\begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix}}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}}\mathbf{i} + \frac{\begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix}}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}}\mathbf{j} + \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}}\mathbf{k}. \end{aligned}\right\} \quad (274)$$

Заметим, что так как t, n, b — единичные векторы, то их координаты (коэфициенты этих разложений) совпадают с их направляющими косинусами. Поэтому матрица коэфициентов в разложениях (274) есть матрица направляющих косинусов для трех взаимно ортогональных направлений: по касательной, главной нормали и бинормали в данной точке кривой. Эта матрица будет, таким образом, ортогональной.

Все выписанные сейчас формулы относятся к случаю, когда радиус-вектор $\mathbf{r}$ задан в функции параметра s. Теоретически это всегда возможно (см. § 15), но практически часто бывает довольно утомительным вычислять t, n, b, k, $\varkappa$ по этим формулам, если предварительно приходится переходить от задания кривой в произвольном параметре:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}, \quad (275)$$

к параметру s.

Поэтому мы покажем, как вычисляются кривизна и кручение, исходя непосредственно из уравнения (275). Изучим предварительно, как меняются некоторые выражения, составленные из производных от радиуса-вектора по параметру, когда мы переходим к новому параметру.

Итак, пусть старый параметр t задан как функция нового параметра τ. Тогда радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ можно рассматривать как функцию от функции τ. Вычисляем по соответствующим правилам производные от $\mathbf{r}$ по τ:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{r}'\frac{dt}{d\tau},$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} = \mathbf{r}''\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \mathbf{r}'\frac{d^2t}{d\tau^2},$$

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{d\tau^3} = \mathbf{r}'''\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^3 + 3\mathbf{r}''\frac{dt}{d\tau}\cdot\frac{d^2t}{d\tau^2} + \mathbf{r}'\frac{d^3t}{d\tau^3}.$$

Штрихами обозначаем диференцирование по старому параметру t.

Перемножим векторно первые два равенства почленно. Получим

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}, \frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2}\right] = [\mathbf{r}', \mathbf{r}'']\cdot\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^3, \quad (276)$$

так как в правой части векторы, коллинеарные $\mathbf{r}'$, дают в векторном произведении между собой нуль.

Перемножим теперь скалярно равенство (276) и предшествующее ему равенство почленно. Получим, учитывая, что перемножение векторного произведения на третий вектор скалярно дает смешанное произведение:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\ \frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2}\ \frac{d^3\mathbf{r}}{d\tau^3}\right) = (\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''')\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^6. \tag{277}$$

Остальные члены правой части исчезнут, так как $[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']$ перпендикулярно к $\mathbf{r}''$ и $\mathbf{r}'$ и в скалярном произведении с ними дает нуль.

Интересно, что равенства (276) и (277) можно переписать в виде, симметричном относительно обоих параметров t и τ. Умножим, действительно, обе части (276) на $d\tau^3$, а обе части (277) на $d\tau^6$. Получим

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}, \frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2}\right] d\tau^3 = [\mathbf{r}', \mathbf{r}''] dt^3,$$

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\ \frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2}\ \frac{d^3\mathbf{r}}{d\tau^3}\right) d\tau^6 = (\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''') dt^6.$$

Эти равенства показывают, что бесконечно малый 3-го порядка вектор

$$[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] dt^3$$

и бесконечно малый 6-го порядка скаляр

$$(\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''') dt^6$$

инвариантны при переходе к любой другой параметризации.

Возвращаясь к формулам (276) и (277), примем, в частности, за новый параметр τ длину дуги s вдоль кривой; параметризацию t оставим произвольной. Формулы примут вид

$$[\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}] = [\mathbf{r}', \mathbf{r}''] \left(\frac{dt}{ds}\right)^3,$$

$$(\dot{\mathbf{r}}\ \ddot{\mathbf{r}}\ \dddot{\mathbf{r}}) = (\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''')\left(\frac{dt}{ds}\right)^6.$$

Сравнивая их с формулами (270) и (271), мы получаем

$$k\mathbf{b} = [\mathbf{r}', \mathbf{r}''] \left(\frac{dt}{ds}\right)^3, \tag{278}$$

$$k^2\varkappa = (\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''')\left(\frac{dt}{ds}\right)^6. \tag{279}$$

Но, как известно,

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'|.$$

Поэтому, если взять обе части формулы (278) по модулю, получится

$$k = \frac{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|}{|\mathbf{r}'|^3}. \tag{280}$$

Вставляя полученное для k выражение в (279), мы получим

$$\frac{|[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']|^2}{|\mathbf{r}'|^6}\varkappa = (\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''')\frac{1}{|\mathbf{r}'|^6},$$

откуда

$$\varkappa = \frac{(\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''')}{[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']^2}. \tag{281}$$

Здесь в знаменателе мы заменили квадрат модуля скалярным квадратом самого вектора. Формулы (280) и (281) приведены уже к окончательному виду и служат для вычисления кривизны и кручения в случае, когда кривая задана уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$$

при любом выборе параметра t вдоль кривой. Перепишем в заключение эти формулы в координатной форме.

Выпишем производные радиуса-вектора по параметру t:

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k},$$
$$\mathbf{r}'' = x''\mathbf{i} + y''\mathbf{j} + z''\mathbf{k},$$
$$\mathbf{r}''' = x'''\mathbf{i} + y'''\mathbf{j} + z'''\mathbf{k}.$$

Отсюда по известным формулам векторной алгебры вычисляем

$$[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] = (y'z'' - z'y'')\,\mathbf{i} + (z'x'' - x'z'')\,\mathbf{j} + (x'y'' - y'x'')\,\mathbf{k},$$

$$(\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''') = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Вставляя полученные выражения в (280) и (281), получаем эти формулы в координатной форме:

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{\sqrt{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \varkappa &= \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}. \end{aligned}\right\} \tag{282}$$

Замечательно, что последняя формула выражает нам кручение $\varkappa$ через производные текущих координат по параметру *рациональным образом* и, следовательно, с вполне определенным знаком. Напротив, выражение для k содержит квадратные корни, так что помимо формулы нужна словесная оговорка, что неопределенность в знаке мы условились устранять, беря всегда знак $+$.

Чтобы установить связь с предыдущим, отметим, что если кривая лежит в плоскости XY и, следовательно, $z \equiv 0$, то выражение для k

сильно упрощается и, как легко проверить, сводится к тому, которое мы имели в теории плоских кривых.

Примеры.

Применим предшествующую теорию к простейшему случаю неплоской кривой — *винтовой линии*. Так называется линия, описываемая точкой M, которая движется по какой-нибудь образующей прямого круглого цилиндра, вращающегося в то же время около своей оси так, что путь, проходимый точкой M по образующей, все время пропорционален углу поворота цилиндра.

Пусть уравнение цилиндра

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

и пусть λ — коэфициент пропорциональности между углом φ поворота цилиндра и путем, пройденным точкой M по образующей. Показать, что если принять за начальное положение точки M точку $M_0(a, 0, 0)$, то положение точки M в зависимости от угла φ будет определяться координатами

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad z = \lambda\varphi.$$

Мы получили параметрическое представление винтовой линии; перепишем его в векторной форме:

$$\mathbf{r} = a\mathbf{e}(\varphi) + \lambda\varphi\mathbf{k},$$

где

$$\mathbf{e}(\varphi) = \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi.$$

Винтовая линия бесконечное число раз обвивается вокруг „вертикально поставленного" цилиндра, поднимаясь с каждым витком на высоту $2\pi\lambda$ (см. черт. 68).

Вычислим вектор, направленный по касательной, диференцируя по φ:

$$\mathbf{r}' = a\mathbf{e}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \lambda\mathbf{k},$$

так как

$$\mathbf{e}'(\varphi) = \mathbf{e}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right);$$

отсюда

$$ds = |\mathbf{r}'|\,d\varphi = \sqrt{a^2 + \lambda^2}\,d\varphi.$$

Следовательно, $s = \sqrt{a^2 + \lambda^2}\varphi$, если s отсчитывать от той же начальной точки M_0 и в сторону возрастания φ.

Вычислим вектор $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}}\mathbf{e}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}}\mathbf{k}.$$

Очевидно,

$$\cos(\widehat{\mathbf{t}, \mathbf{k}}) = \mathbf{t}\mathbf{k} = \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + \lambda^2}}.$$

Итак, *касательная к винтовой линии направлена под постоянным углом к оси цилиндра (т. е. оси z).*

Диференцируем $\mathbf{r}'$ по φ:

$$\mathbf{r}'' = -a\mathbf{e}(\varphi).$$

Легко проверить, что $\mathbf{r}'' \perp \mathbf{r}'$, т. е. $\mathbf{r}''$ идет по нормали; но так как $\mathbf{r}''$ всегда лежит в соприкасающейся плоскости, то эта нормаль будет *главной*. *Все главные нормали винтовой линии пересекают ось цилиндра и притом под прямым углом.* В самом деле, если к радиусу-вектору $\mathbf{r}$ добавить $\mathbf{r}''$, то

мы получаем $\lambda\varphi\mathbf{k}$, т. е. смещаясь из точки M на вектор $\mathbf{r}''$ по главной нормали, мы попадаем на ось Z; очевидно также, что $\mathbf{r}'' \perp \mathbf{k}$.

Вычислим $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda^2}}\mathbf{e}(\varphi) \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+\lambda^2}} = \frac{a}{a^2+\lambda^2}(-\mathbf{e}(\varphi)).$$

Сравнивая с первой формулой Френе, убеждаемся, что в нашем случае

$$k = \frac{a}{a^2+\lambda^2}, \quad \mathbf{n} = -\mathbf{e}(\varphi).$$

Очевидно

$$\mathbf{b} = [\mathbf{t}, \mathbf{n}] = -\frac{\lambda}{\sqrt{a^2+\lambda^2}}\mathbf{e}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda^2}}\mathbf{k}.$$

Дифференцируя по s, получим

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\lambda}{\sqrt{a^2+\lambda^2}}\mathbf{e}(\varphi) \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+\lambda^2}} = \left(-\frac{\lambda}{a^2+\lambda^2}\right)(-\mathbf{e}(\varphi)).$$

Сравнивая с третьей формулой Френе, получаем

$$\varkappa = \frac{\lambda}{a^2+\lambda^2}.$$

Таким образом, k и $\varkappa$ для винтовой линии *постоянные*. Знак $\varkappa$ будет таким же, как и знак λ.

Найдем, наконец, мгновенную угловую скорость ω:

$$\omega = \varkappa\mathbf{t} + k\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\lambda^2}}\mathbf{k}.$$

Оказывается, что ω тоже постоянная, так что трехгранник Френе вращается все время около оси, параллельной оси Z, с постоянной угловой скоростью $\frac{1}{\sqrt{a^2+\lambda^2}}$.

§ 31. Строение кривой вблизи данной точки.

Мы будем предполагать, что в изучаемой точке M

$$k > 0, \quad \varkappa \neq 0. \tag{283}$$

Первое условие устраняет случай точки распрямления. Второе условие, с которым нам не приходилось еще сталкиваться, устраняет, сверх того, случай точки, где $\varkappa = 0$, т. е. где скорость вращения соприкасающейся плоскости по отношению к пути, проходимому по кривой, обращается в нуль и соприкасающаяся плоскость в этом смысле будет стационарной. Как мы знаем, если $\varkappa = 0$ во всех точках кривой, то кривая плоская. Но и для существенно пространственной кривой возможны отдельные точки, где удовлетворяется уравнение $\varkappa = 0$. Вблизи таких точек „уплощения" поведение кривой носит особенный характер, почему мы и ограничиваемся лишь наиболее типическим случаем (283).

Предполагаем, что уравнение кривой задано в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s).$$

Пусть точка M отвечает данному значению s; перейдем в бесконечно близкую точку M', давая s приращение Δs. Тогда радиус-вектор точки M' будет $\mathbf{r}(s+\Delta s)$, так что

$$\overline{OM} = \mathbf{r}(s), \quad \overline{OM'} = \mathbf{r}(s+\Delta s)$$

и, следовательно,

$$\overline{MM'} = \overline{OM'} - \overline{OM} = \mathbf{r}(s+\Delta s) - \mathbf{r}(s).$$

Разлагая приращение вектор-функции $\mathbf{r}(s)$ в ряд Тэйлора по степеням Δs, мы получим вектор смещения $\overline{MM'}$ в виде

$$\overline{MM'} = \dot{\mathbf{r}}\Delta s + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{r}}(\Delta s)^2 + \frac{1}{6}\dddot{\mathbf{r}}(\Delta s)^3 + \ldots$$

Точками обозначен остаточный член, бесконечно малый не ниже 4-го порядка. Им мы будем пренебрегать, так как в этом параграфе изучается строение кривой с точностью 3-го порядка.

Пользуясь формулами (265), (266), (267), мы можем переписать выражение для $\overline{MM'}$ так:

$$\overline{MM'} = \mathbf{t}\Delta s + \frac{1}{2}k\mathbf{n}(\Delta s)^2 + \frac{1}{6}(-k^2\mathbf{t} + \dot{k}\mathbf{n} + k\varkappa\mathbf{b})(\Delta s)^3 + \ldots$$

Правая часть равенства разложена по векторам $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$; соберем коэфициенты при этих векторах. Получим

$$\overline{MM'} = \mathbf{t}\{\Delta s + \ldots\} + \mathbf{n}\left\{\frac{1}{2}k(\Delta s)^2 + \ldots\right\} + \mathbf{b}\left\{\frac{1}{6}k\varkappa(\Delta s)^3 + \ldots\right\}. \tag{284}$$

В фигурных скобках при $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ выписаны главные части соответствующих коэфициентов, точками же обозначены бесконечно малые более высоких порядков.

Формула (284) даст нам ясное представление о поведении кривой вблизи данной точки (черт. 66). Прежде всего вектор $\overline{MM'}$ разложен по $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, другими словами, смещение из данной точки M в бесконечно близкую точку M' осуществляется последовательными смещениями: $\overline{MM_1}$ — по касательной, $\overline{M_1M_2}$ — параллельно главной нормали и, наконец, $\overline{M_2M'}$ — параллельно бинормали. Мы видим, что коэфициент при $\mathbf{t}$ есть бесконечно малое 1-го порядка относительно Δs, коэфициент при $\mathbf{n}$ — 2-го порядка и при $\mathbf{b}$ — 3-го порядка. Это показывает, что в основном — на бесконечно малое 1-го порядка — смещение происходит по касательной:

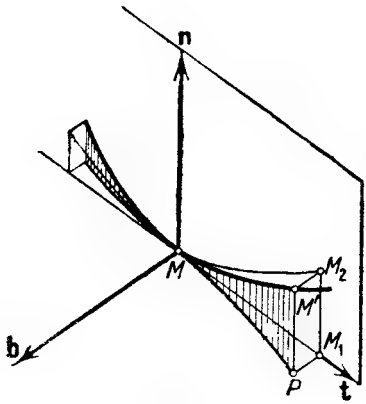
$$\overline{MM_1} = \mathbf{t}(\Delta s + \ldots). \tag{285}$$

Далее, смещение по главной нормали будет бесконечно малым лишь 2-го порядка:

$$\overline{M_1M_2} = \mathbf{n}\left(\frac{1}{2}k(\Delta s)^2 + \dots\right). \tag{286}$$

Учитывая лишь эти смещения, мы остаемся еще в соприкасающейся плоскости, т. е. в плоскости векторов $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$. Наконец, смещение по бинормали, впервые выводящее нас из соприкасающейся плоскости, будет уже только 3-го порядка:

$$\overline{M_2M'} = \mathbf{b}\left(\frac{1}{6}k\varkappa(\Delta s)^3 + \dots\right). \tag{287}$$



Черт. 66.

Таким образом *касательная, главная нормаль и бинормаль в данной точке кривой отчетливо различаются между собой порядком малости смещений по их направлениям при движении из данной точки по кривой.*

Изучим теперь эти смещения более детально. Как показывает (285), при изменении знака у Δs смещение $\overline{MM_1}$ меняет направление на обратное (поскольку это происходит с его главной частью $\Delta s\,\mathbf{t}$). Таким образом при $\Delta s > 0$ мы смещаемся по направлению касательной в одну сторону (именно в сторону $\mathbf{t}$), а при $\Delta s < 0$ в другую сторону (в сторону $-\mathbf{t}$). В результате кривая вблизи данной точки расположена по обе стороны нормальной плоскости (плоскости $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$) и пересекает ее в данной точке.

Далее, (286) показывает, что при любом Δs коэфициент при $\mathbf{n}$ остается положительным (у нас $k > 0$), так что, смещаемся ли мы по кривой в ту или другую сторону из точки M, смещение, параллельное главной нормали, всегда направлено по вектору $\mathbf{n}$, т. е. в положительном направлении главной нормали. Поэтому кривая в обе стороны от точки M расположена по одну сторону плоскости векторов $\mathbf{t}$, $\mathbf{b}$, уклоняясь от нее в направлении $\mathbf{n}$. Уклонение это в своей главной части $\frac{1}{2}k(\Delta s)^2$ пропорционально квадрату пройденного пути по кривой с коэфициентом пропорциональности $\frac{1}{2}k$. Это еще раз поясняет геометрическое значение кривизны k.

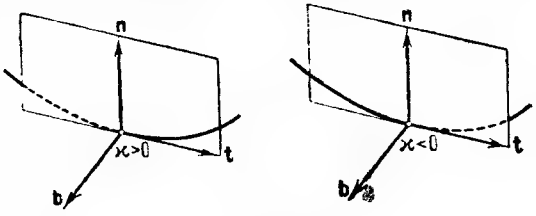
Наконец, главная часть (287) содержит $(\Delta s)^3$ и потому меняет знак вместе с Δs. Одновременно с этим меняет знак и все смещение $\overline{M_2M'}$, так что по одну сторону точки M кривая уклоняется от соприкасающейся плоскости $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ в направлении $\mathbf{b}$, а по другую сторону — в направлении $-\mathbf{b}$. Следовательно, в точке M кривая переходит

с одной стороны соприкасающейся плоскости на другую. Здесь нам придется различать два случая в зависимости от знака $\varkappa$.

Пусть $\varkappa > 0$. Так как $k > 0$, то, если $\Delta s > 0$, коэфициент при **b** в (287) будет положительным, и смещение $\overline{M_2M'}$ направлено в сторону **b**; если $\Delta s < 0$, то коэфициент отрицателен и смещение $\overline{M_2M'}$ происходит в сторону $-\mathbf{b}$.

Сопоставляя все эти данные, мы видим, что при $\Delta s > 0$ смещение по касательной происходит в сторону **t**, по главной нормали в сторону **n**, по бинормали в сторону **b**; а при $\Delta s < 0$ соответственно в сторону $-\mathbf{t}$, **n**, $-\mathbf{b}$. Мы получаем ход кривой, начерченной на левом черт. 67.

Пусть теперь $\varkappa < 0$. Очевидно, этот случай будет отличаться от предыдущего только тем, что теперь при $\Delta s > 0$ смещение по бинормали происходит в сторону $-\mathbf{b}$, а при $\Delta s < 0$ в сторону **b**. Ход кривой нанесен на правом черт. 67.



Черт. 67.

Нужно отчетливо уяснить себе, что поведение кривой в этих двух случаях существенно различно, и никаким непрерывным движением в пространстве нельзя заставить правую кривую принять положение левой или наоборот. Зато при зеркальном отображении правый и левый случаи меняются местами; это совершенно очевидно, если брать зеркальное отображение относительно плоскости **t**, **n**.

Можно формулировать наглядное правило, чтобы отличать кривые положительного и отрицательного кручений. *Допустим, что мы смотрим с какой-нибудь стороны соприкасающейся плоскости в данной точке, заставляя подвижную точку пробегать по кривой в таком направлении, чтобы описываемый ею путь казался закругляющимся против часовой стрелки* (именно таковы направления на кривых, указанные векторами **t** на черт. 67). *Если при этом подвижная точка переходит с задней стороны соприкасающейся плоскости на переднюю, то* $\varkappa > 0$ (левый чертеж), *если же с передней стороны на заднюю, то* $\varkappa < 0$ (правый чертеж).

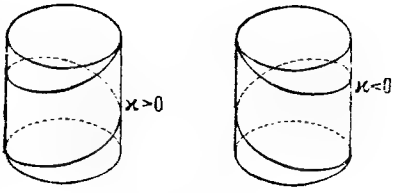
Может показаться, что картина изменится, если „зайти с другой стороны" соприкасающейся плоскости, но это не так. Хотя передняя и задняя стороны соприкасающейся плоскости поменяются при этом местами, но обратным придется взять и направление движения подвижной точки, чтобы с новой точки зрения оно представлялось закругляющимся против часовой стрелки. Поэтому, если раньше подвижная точка переходила с задней стороны на переднюю, то то же самое будет представляться и с новой точки зрения. Следовательно, формулированный выше признак положительного кручения связан только с формой самой кривой и не зависит от выбора точки зрения. То же самое относится, конечно, и к отрицательному кручению.

Полезно проиллюстрировать различие между случаями $\varkappa > 0$ и $\varkappa < 0$ примером правой и левой винтовых нарезок на цилиндре (черт. 68).

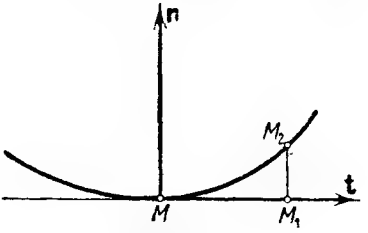
Для уяснения хода пространственной кривой вблизи данной точки M имеет значение вид ее *проекций на плоскости трехгранника Френе.*

Возьмем прежде всего проекцию кривой на ее соприкасающуюся плоскость **t, n** в точке M. Для того чтобы M' (черт. 66) спроектировать на плоскость **t, n**, достаточно в векторе смещения (284) отбросить составляющую по бинормали. Действительно, из построения видно, что проекцией M' будет M_2, а вектор смещения из M в M_2 имеет вид

$$\overline{MM_2} = \overline{MM_1} + \overline{M_1M_2} = \mathbf{t}\left\{(\Delta s) + \ldots\right\} + \mathbf{n}\left\{\frac{1}{2}k(\Delta s)^2 + \ldots\right\}. \quad (288)$$



Черт. 68.



Черт. 69.

Точка M_2 описывает плоскую кривую (проекцию в соприкасающейся плоскости), причем смещение по **t** будет бесконечно малым 1-го порядка, а перпендикулярно **t** — 2-го порядка (всегда направлено в сторону **n**) (черт. 69).

Отсюда видно, что прямая MM_1 имеет в точке M касание 1-го порядка с полученной кривой и что последняя расположится по одну сторону своей касательной MM_1. Итак, проекция на соприкасающуюся плоскость вблизи точки M имеет наиболее типический вид плоской кривой вблизи ее обыкновенной точки. Нетрудно было бы показать, что кривизна k в точке M имеет общее значение для исходной кривой и ее проекции на соприкасающуюся плоскость.

Спроектируем теперь исходную кривую на плоскость **t, b**. Проектируя M' на эту плоскость (см. черт. 66), мы попадаем в некоторую точку P, которая и описывает нам искомую кривую. Очевидно, что вектор смещения из M в P имеет теперь вид

$$\overline{MP} = \overline{MM_1} + \overline{M_1P} = \overline{MM_1} + \overline{M_2M'} =$$
$$= \mathbf{t}(\Delta s + \ldots) + \mathbf{b}\left(\frac{1}{6}k\varkappa(\Delta s)^3 + \ldots\right) \quad (289)$$

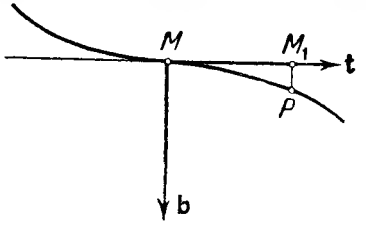
Другими словами, из разложения (284) достаточно выкинуть член, направленный по главной нормали. Смещение $\overline{MP}$ будет бесконечно

малым 1-го порядка в направлении, параллельном t, и бесконечно малым *третьего* порядка перпендикулярно t (т. е. параллельно b). Это означает, что прямая MM_1 в точке M имеет касание *второго* порядка с полученной кривой, и последняя расположена по обе стороны своей касательной MM_1 (коэфициент при **b** меняет знак вместе с Δs).

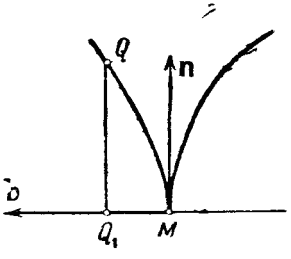
Итак, *проекция на спрямляющую плоскость* t, b *имеет в* M *точку перегиба* (черт. 70).

Наиболее интересный результат получается при проектировании исходной кривой на нормальную плоскость n, b. Пусть проекцией M' на эту плоскость будет точка Q, которая и опишет искомую кривую. Аналогично предыдущему смещение $\overline{MQ}$ получается из смещения $\overline{MM'}$ выкидыванием из (284) слагаемого, параллельного t:

$$\overline{MQ} = \mathbf{n}\left(\frac{1}{2}k(\Delta s)^2 + \dots\right) + \mathbf{b}\left(\frac{1}{6}k\varkappa(\Delta s)^3 + \dots\right). \qquad (290)$$



Черт. 70.



Черт. 71.

Действительно, в этом случае $\overline{MQ}$ лежит в нормальной плоскости n, b, причем

$$\overline{MM'} - \overline{MQ} = \mathbf{t}(\Delta s + \dots)$$

или

$$\overline{QM'} = \mathbf{t}(\Delta s + \dots),$$

откуда видно, что $\overline{QM'}$ перпендикулярен n, b, т. е. Q есть проекция M'.

Мы видим, что смещение $\overline{MQ}$ имеет в направлении n составляющую бесконечно малую *второго* порядка, всегда направленную в сторону n [$k > 0$, $(\Delta s)^2 > 0$], так что проекция лежит по *одну* сторону бинормали MQ_1 (черт. 71). В перпендикулярном же n направлении смещение будет бесконечно малым *третьего* порядка относительно Δs; оно меняет знак вместе с Δs, и проекция расположится по обе стороны нормали n. Так как смещение в сторону от n будет бесконечно малым высшего порядка [порядок $(\Delta s)^3$] сравнительно со смещением по n [порядок $(\Delta s)^2$], то кривая по обе стороны главной нормали прижимается к ней, имея ее своей касательной в точке M для обеих ветвей.

Итак, проекция на нормальную плоскость имеет в M точку возврата (черт. 71). При изучении перечисленных трех проекций мы

непосредственно рассматривали их строение в бесконечно малом вблизи M и заключали отсюда о характере этих кривых в точке M. Разумеется, те же заключения можно было бы сделать на основании ранее выведенных формальных признаков.

§ 32. Соприкасающаяся сфера.

Задача, которой мы будем заниматься в этом параграфе, носит более специальный характер, чем предыдущие, и приводит нас к сравнительно тонким построениям, связанным с пространственной кривой в данной ее точке. Пусть кривая задана уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} + z(s)\,\mathbf{k}.$$

Возьмем произвольную сферу в пространстве

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R_s^2 = 0, \tag{291}$$

где постоянные a, b, c, R_s пока неопределенные.

Поставим себе задачей из всевозможных сфер подобрать такую, которая в данной точке пространственной кривой имеет с ней касание по возможности наивысшего порядка. По известным нам правилам (§ 25) мы должны в левую часть уравнения сферы подставить текущие координаты нашей кривой, составив, таким образом, функцию

$$\varphi(s) = [x(s)-a]^2 + [y(s)-b]^2 + [z(s)-c]^2 - R_s^2. \tag{292}$$

Затем мы должны так подобрать постоянные a, b, c, R_s, чтобы в данной точке кривой обеспечить обращение в нуль $\varphi(s)$ и ее последовательных производных до высшего по возможности порядка [см. условие (234)]. Так как неопределенных постоянных, которые мы должны подобрать, у нас всего четыре, то мы можем расчитывать удовлетворить четырем уравнениям

$$\varphi(s) = \varphi'(s) = \varphi''(s) = \varphi'''(s) = 0, \tag{293}$$

после чего в данной точке кривой обеспечивается касание 3-го порядка со сферой (291).

Сфера, имеющая с кривой в данной ее точке касание 3-го порядка, называется соприкасающейся сферой в этой точке.

Сейчас мы займемся отысканием этой сферы. Обозначим через S центр пока произвольно выбранной сферы (291) и через $\mathbf{r}_s$ его радиус-вектор. Так как координаты центра S, как видно из уравнения (291), обозначены нами a, b, c, то очевидно

$$\mathbf{r}_s = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}.$$

Пусть M пока произвольная точка на кривой с радиусом-вектором

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\,\mathbf{i} + y(s)\,\mathbf{j} + z(s)\,\mathbf{k}.$$

Отсюда вектор, соединяющий точку M с S, выражается в виде

$$\overrightarrow{MS} = \mathbf{r}_s - \mathbf{r}(s) = [a - x(s)]\,\mathbf{i} + [b - y(s)]\,\mathbf{j} + [c - z(s)]\,\mathbf{k}. \quad (294)$$

Возводя каждый из этих векторов в квадрат, получим

$$\overrightarrow{MS}^2 = [\mathbf{r}_s - \mathbf{r}(s)]^2 = [a - x(s)]^2 + [b - y(s)]^2 + [c - z(s)]^2. \quad (294')$$

Мы можем теперь переписать выражение (292) в виде

$$\varphi(s) = [\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_s]^2 - R_s^2, \quad (295)$$

где $\mathbf{r}_s$ — радиус-вектор центра S некоторой сферы, а R_s — ее радиус, тот и другой постоянные, пока неопределенные. Что же касается $\mathbf{r}(s)$, то это текущий радиус-вектор по кривой, выраженный в функции параметра s (длины дуги). В дальнейшем аргумент s при $\mathbf{r}$ и его производных мы подразумеваем, но не пишем.

Дифференцируем (295) по s, заменяя $\dot{\mathbf{r}}$, $\dot{\mathbf{t}}$, $\dot{\mathbf{n}}$ через $\mathbf{t}$, $k\mathbf{n}$, $\varkappa\mathbf{b} - k\mathbf{t}$:

$$\varphi'(s) = 2\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) = 2\mathbf{t}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s),$$

$$\varphi''(s) = 2\dot{\mathbf{t}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) + 2\mathbf{t}\dot{\mathbf{r}} = 2k\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) + 2\mathbf{t}^2 = 2[k\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) + 1],$$

$$\varphi'''(s) = 2\{\dot{k}\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) + k\dot{\mathbf{n}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) + k\mathbf{n}\dot{\mathbf{r}}\} = 2(\dot{k}\mathbf{n} + k\varkappa\mathbf{b} - k^2\mathbf{t})(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s).$$

Фиксируем теперь значение s и, следовательно, точку M на кривой с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ выберем вполне определенной. Потребуем далее, чтобы постоянные a, b, c, R_s (или, что то же, $\mathbf{r}_s$ и R_s) удовлетворяли условиям (293). Эти условия можно теперь записать в виде

$$\left.\begin{aligned} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)^2 - R_s^2 &= 0, \\ \mathbf{t}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) &= 0, \\ k\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) + 1 &= 0, \\ (\dot{k}\mathbf{n} + k\varkappa\mathbf{b} - k^2\mathbf{t})(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (296)$$

Что касается первого уравнения, то оно служит для отыскания радиуса сферы R_s, после того как центр ее S найден. Оно показывает, что так как соприкасающаяся сфера в точке M должна пройти через точку M, то радиус сферы R_s нужно брать равным расстоянию MS. Именно это и записано в первом уравнении (296), так как $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)^2 = \overrightarrow{MS}^2$.

Что же касается остальных трех уравнений, то они служат для определения $\mathbf{r}_s$, который находится из них однозначно (предполагая, что в точке M кривизна $k > 0$ и кручение $\varkappa \neq 0$).

Разложим вектор $\overrightarrow{MS}$, соединяющий точку M с центром сферы S, по векторам $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, взятым в точке M:

$$\overrightarrow{MS} = \mathbf{r}_s - \mathbf{r} = \alpha\mathbf{t} + \beta\mathbf{n} + \gamma\mathbf{b},$$

где α, β, γ — пока неизвестные коэфициенты разложения. Их отыскание, как мы видим, вполне равносильно отысканию вектора $\overrightarrow{MS}$ и тем самым центра сферы S.

Второе из равенств (296) показывает, что вектор $\mathbf{r}-\mathbf{r}_s$ ортогонален к $\mathbf{t}$, лежит, следовательно, в нормальной плоскости в точке M и разлагается по векторам $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$. Коэфициент α равен нулю. Мы можем написать

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_s=-\beta\mathbf{n}-\gamma\mathbf{b}.$$

Вставляя это выражение в третье из равенств (296) и учитывая, что $\mathbf{bn}=0$, $\mathbf{n}^2=1$, получим

$$-k\beta+1=0 \quad \text{или} \quad \beta=\frac{1}{k}=R,$$

где R — радиус кривизны в точке M. Следовательно,

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_s=-R\mathbf{n}-\gamma\mathbf{b}.$$

Остается найти γ. Вставляем последнее выражение в четвертое уравнение (296) и, учитывая, что попарные скалярные произведения $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ суть нули, а скалярные квадраты — единицы, получаем

$$-R\dot{k}-\gamma k\varkappa=0 \quad \text{или} \quad \gamma=-\frac{R\dot{k}}{k\varkappa}=-\frac{R^2\left(\frac{1}{R}\right)^{\cdot}}{\varkappa}=\frac{\dot{R}}{\varkappa}.$$

Окончательно

$$\overrightarrow{MS}=\mathbf{r}_s-\mathbf{r}=R\mathbf{n}+\frac{\dot{R}}{\varkappa}\mathbf{b}. \tag{297}$$

Итак, вектор $\overrightarrow{MS}$, а вместе с ним и центр сферы S однозначно определены. Из первого равенства (296) легко найти теперь квадрат радиуса сферы:

$$R_s^2=(\mathbf{r}-\mathbf{r}_s)^2=\left(R\mathbf{n}+\frac{\dot{R}}{\varkappa}\mathbf{b}\right)^2=R^2+\frac{\dot{R}^2}{\varkappa^2}. \tag{298}$$

Так как условия касания 3-го порядка (296) удовлетворены, то *формулы* (297) *и* (298) *определяют центр* S *и радиус* R_s *соприкасающейся сферы в точке* M. Наша задача решена.

Как видим, чтобы попасть из точки M в центр S, нужно сместиться сначала на вектор $R\mathbf{n}$. Как мы знаем [см. (252)], мы попадаем в результате в центр кривизны C на главной нормали (черт. 72). После этого нужно еще сместиться на вектор $\frac{\dot{R}}{\varkappa}\mathbf{b}$, параллельный бинормали, после чего мы попадаем в S. Центр соприкасающейся сферы S лежит, таким образом, на прямой CS, проведенной через центр кривизны параллельно бинормали. Эта прямая называется *осью кривизны* кривой в точке M. Очевидно, что окружность, по которой соприкасающаяся плоскость пересекается с соприкасающейся сферой, имеет центр в C (так как C —

основание перпендикуляра CS, опущенного из S на соприкасающуюся плоскость). Эта окружность, следовательно, — соприкасающаяся окружность в точке M.

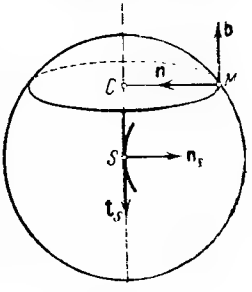
Заметим, что при обращении $\varkappa$ в нуль в данной точке центр сферы удаляется в бесконечность в направлении бинормали, что соответствует вырождению соприкасающейся сферы в соприкасающуюся плоскость. И действительно, в этом случае соприкасающаяся плоскость имеет с кривой в данной точке касание не только второго (как обычно), но и третьего порядка.

Изучим теперь кривую, описываемую точкой S, когда M движется по исходной кривой. Исходная кривая отнесена к параметру s и, следовательно, вдоль нее $\mathbf{r}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, R, $\varkappa$ выражаются как функции s. Поэтому, если переписать (297) в виде

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{r} + R\mathbf{n} + \frac{\dot{R}}{\varkappa}\mathbf{b}, \qquad (299)$$

то $\mathbf{r}_s$ выразится в функции s, и (299) можно рассматривать как параметрическое представление кривой, описываемой S. Конечно, для нее параметр s уже не играет роли дуги. Возьмем производную от $\mathbf{r}_s$ по s. Получим

$$\dot{\mathbf{r}}_s = \dot{\mathbf{r}} + \dot{R}\mathbf{n} + R\dot{\mathbf{n}} + \left(\frac{\dot{R}}{\varkappa}\right)^{\cdot}\mathbf{b} + \frac{\dot{R}}{\varkappa}\dot{\mathbf{b}}.$$



Черт. 72.

Заменяя $\dot{\mathbf{r}}$ через $\mathbf{t}$ и пользуясь формулами Френе, можно записать

$$\dot{\mathbf{r}}_s = \mathbf{t} + \dot{R}\mathbf{n} + R(\varkappa\mathbf{b} - k\mathbf{t}) + \left(\frac{\dot{R}}{\varkappa}\right)^{\cdot}\mathbf{b} + \frac{\dot{R}}{\varkappa}(-\varkappa\mathbf{n}).$$

Так как $Rk = 1$, то члены, содержащие $\mathbf{t}$, исчезают; взаимно уничтожаются и члены с $\mathbf{n}$. Получаем

$$\dot{\mathbf{r}}_s = \left(R\varkappa + \left(\frac{\dot{R}}{\varkappa}\right)^{\cdot}\right)\mathbf{b}. \qquad (300)$$

Интересно в связи с этой формулой исследовать *частный случай, когда исходная кривая сферическая*, т. е. способна целиком уместиться на поверхности некоторой сферы. Тогда эта сфера будет, очевидно, соприкасающейся сферой во всех точках кривой, так что соприкасающаяся сфера при движении точки M по исходной кривой остается без изменения. Поскольку точка S, следовательно, неподвижна и ее радиус-вектор $\mathbf{r}_s$ постоянный, левая часть (300) обращается в нуль, и мы получаем

$$R\varkappa + \left(\frac{\dot{R}}{\varkappa}\right)^{\cdot} = 0. \qquad (301)$$

Таково дифференциальное уравнение, связывающее вдоль исходной кривой функции дуги $R(s)$ и $\varkappa(s)$ с их производными по s, если эта кривая сферическая.

Покажем, что условие (301) не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы кривая была сферической. Действительно, если оно выполнено, то из (300) следует, что

$$\dot{\mathbf{r}}_s = 0 \quad \text{и, значит,} \quad \mathbf{r}_s = \text{const},$$

т. е. центр соприкасающейся сферы один и тот же для всех точек M на кривой. Может показаться, что радиус R_s соприкасающейся сферы может тем не менее меняться от точки к точке. Однако это не так. Вычислим производную по s от R_s^2, пользуясь формулой (298). Получим

$$\frac{d}{ds}(R_s^2) = 2R\dot{R} + 2\frac{R}{\varkappa}\left(\frac{R}{\varkappa}\right)^{\cdot} = \frac{2\dot{R}}{\varkappa}\left(R\varkappa + \left(\frac{\dot{R}}{\varkappa}\right)^{\cdot}\right).$$

Из (301) следует теперь, что

$$\frac{d}{ds}(R_s^2) = 0 \quad \text{и, значит,} \quad R_s^2 = \text{const}.$$

Следовательно, и центр и радиус соприкасающейся сферы остаются без изменения при движении точки M по данной кривой, и точка M движется по поверхности неизменной сферы. Исходная кривая сферическая.

Итак, *для того чтобы данная кривая была сферической, необходимо и достаточно, чтобы функции $R(s)$ и $\varkappa(s)$, выражающие радиус кривизны и кручение в зависимости от длины дуги s вдоль кривой, были связаны дифференциальным уравнением* (301).

Если оставить случай (301) в стороне, кривая, описываемая центром S, не вырождается в точку и связана интересными зависимостями с исходной кривой.

Прежде всего (300) показывает, что вектор $\dot{\mathbf{r}}_s$, указывающий направление касательной к кривой, описываемой S, параллелен вектору $\mathbf{b}$, т. е. бинормали в точке M. Отсюда следует, что *касательной* в точке S к кривой, описываемой центром S, будет служить *ось кривизны* CS, проходящая через S параллельно $\mathbf{b}$ (черт. 72).

Обозначим через $\mathbf{t}_s$ единичный касательный вектор к кривой, описываемой S. Как мы видим, он параллелен $\mathbf{b}$, а так как векторы эти единичные, то

$$\mathbf{t}_s = \pm \mathbf{b}.$$

Обозначим через s_s длину дуги вдоль кривой, описываемой точкой S. Направление отсчета ее выберем так, чтобы вектор $\mathbf{t}_s$ имел то же направление, что и $-\mathbf{b}$, так что можно считать

$$\mathbf{t}_s = -\mathbf{b}. \tag{302}$$

Дифференцируем обе части этого равенства:

$$d\mathbf{t}_s = -d\mathbf{b} \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{t}_s}{ds_s} ds_s = -\frac{d\mathbf{b}}{ds} ds.$$

Применяем для каждой из кривых формулы Френе, обозначая через k_s и $\varkappa_s$ кривизну и кручение геометрического места центров S. Получим

$$k_s \mathbf{n}_s ds_s = \varkappa \mathbf{n}\, ds. \tag{302'}$$

Так как $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_s$ отличаются только скалярными множителями, то эти единичные векторы параллельны и, следовательно,

$$\mathbf{n}_s = \pm \mathbf{n}. \tag{303}$$

Таким образом, главные нормали обеих кривых параллельны между собой.

Перемножив векторно левые части (302) и (303) между собой и правые между собой, получим

$$[\mathbf{t}_s, \mathbf{n}_s] = \mp [\mathbf{b}, \mathbf{n}]$$

или

$$\mathbf{b}_s = \pm \mathbf{t} \tag{304}$$

— бинормаль в точке S параллельна касательной в M.

Диференцируем обе части равенства (304):

$$d\mathbf{b}_s = \pm d\mathbf{t} \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{b}_s}{ds_s} ds_s = \pm \frac{d\mathbf{t}}{ds} ds.$$

Применяя формулы Френе, получим

$$-\varkappa_s \mathbf{n}_s ds_s = \pm k \mathbf{n}\, ds. \tag{304'}$$

Мы замечаем, что (304') отличается от (302') в левой части лишь множителем $-\frac{\varkappa_s}{k_s}$, а в правой части — множителем $\pm \frac{k}{\varkappa}$.

Отсюда следует, что эти множители равны, т. е. что

$$\frac{\varkappa_s}{k_s} = \mp \frac{k}{\varkappa}. \tag{305}$$

Такова зависимость, существующая между отношениями кривизны к кручению для той и другой кривой.

Знаки $\pm$, входящие в предыдущие формулы, существенны, так как возможен как тот, так и другой случай в зависимости от выбора исходной кривой.

§ 33. Натуральные уравнения.

Как и в случае плоской кривой, естественно поставить следующий вопрос: нельзя ли характеризовать геометрическую форму пространственной кривой уравнениями, вид которых не зависел бы от выбора системы координат в пространстве и был бы связан только с самой кривой?

Рассмотрим кривую, отнесенную к длине дуги как к параметру:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad S_0 \leqslant s \leqslant S,$$

причем точки распрямления отсутствуют, $k \neq 0$.

Тогда вдоль кривой кривизна k и кручение $\varkappa$ также являются определенными функциями s:

$$\left.\begin{aligned} k &= k(s) > 0, \\ \varkappa &= \varkappa(s). \end{aligned}\right\} \tag{306}$$

Так как длина дуги, кривизна и кручение суть величины, не зависящие от выбора координат в пространстве, то и вид функциональной зависимости $k(s)$ и $\varkappa(s)$ также от этого выбора не зависит. Уравнения (306) называют *натуральными уравнениями* пространственной кривой. Как мы сейчас увидим, они характеризуют ее геометрическую форму в смысле, вполне аналогичном случаю плоской кривой.

Предварительно нам понадобятся некоторые вспомогательные построения. Сошлемся прежде всего на следующую теорему анализа.

Пусть x — аргумент, рассматриваемый в некоторой области изменения $X_0 \leqslant x \leqslant X$, а u, v, w — его функции (число этих функций безразлично, мы берем три для примера). Потребуем, чтобы эти функции удовлетворяли следующим условиям:

При любом значении x производные u, v, w должны линейно выражаться через сами эти функции:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w + a_1, \\ \frac{dv}{dx} &= a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w + a_2, \\ \frac{dw}{dx} &= a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w + a_3, \end{aligned}$$

где коэфициенты a_{11}, a_{12}, ... — наперед заданные функции от x, непрерывные в области его изменения.

Кроме того, при некотором фиксированном значении $x = x_0$ функции u, v, w должны принимать наперед заданные значения u_0, v_0, w_0.

Теорема утверждает, что *функции u, v, w, удовлетворяющие указанным требованиям, существуют и определяются единственным образом во всей области изменения x* (Гурса, т. II, § 389) [1]).

---

[1]) Мы не можем здесь давать доказательства этой теоремы, но поясним все же его идею, хотя бы для случая, когда $a_{11}, a_{12}, \ldots$ — аналитические функции от x. Дифференцируя выписанные уравнения по x, мы получим в левых частях вторые производные от u, v, w по x, справа же войдут функции u, v, w и их первые производные (об известных нам функциях $a_{11}, \ldots$ и их производных мы не говорим). Но первые производные от u, v, w можно заменить их выражениями через u, v, w из данных уравнений, так что окончательно и вторые производные от u, v, w выразятся через u, v, w. Дифференцируя полученные уравнения снова и т. д., мы выразим производные любого порядка от u, v, w через сами u, v, w. Но при $x = x_0$ значения u, v, w нам заданы; следовательно определятся и значения всех производных от u, v, w по x. Следовательно, в разложении u, v, w в ряд Тэйлора по степеням $x - x_0$ нам известны все коэфициенты, т. е. функции u, v, w определены.

Рассмотрим теперь формулы Френе в связи с этой теоремой. Разложим векторы трехгранника Френе какой-нибудь кривой по ортам **i**, **j**, **k**:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{t} &= t_x\mathbf{i} + t_y\mathbf{j} + t_z\mathbf{k}\\ \mathbf{n} &= n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j} + n_z\mathbf{k}\\ \mathbf{b} &= b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}\end{aligned}\right\} \quad \text{с матрицей} \quad \left\|\begin{matrix} t_x & t_y & t_z\\ n_x & n_y & n_z\\ b_x & b_y & b_z\end{matrix}\right\|. \tag{307}$$

Коэфициенты разложений совпадают с проекциями векторов на оси X, Y, Z, а так как **t**, **n**, **b** — единичные векторы, то и с их направляющими косинусами. Матрица коэфициентов (307) есть матрица направляющих косинусов взаимно ортогональных направлений **t**, **n**, **b** по отношению к осям X, Y, Z. Очевидно, это — матрица ортогональная; в этом легко убедиться и непосредственно, перемножая скалярно векторы **t**, **n**, **b** между собой; получаем

$$\mathbf{tn} = 0, \quad \text{т. е.} \quad t_xn_x + t_yn_y + t_zn_z = 0, \text{ и т. д.}$$
$$\mathbf{t}^2 = 1, \quad \text{т. е.} \quad t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 = 1 \text{ и т. д.}$$

Попарные произведения различных строк матрицы дают нуль, а одинаковых — единицу. Выпишем формулы Френе, рассматривая вдоль кривой кривизну k и кручение $\varkappa$, как определенные функции параметра s:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mathbf{t}}{ds} &= k(s)\,\mathbf{n},\\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= \varkappa(s)\,\mathbf{b} - k(s)\,\mathbf{t},\\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= -\varkappa(s)\,\mathbf{n}.\end{aligned}\right\} \tag{308}$$

Вставим сюда вместо **t**, **n**, **b** их разложения (307). Тогда векторные равенства можно будет заменить равносильными им скалярными равенствами, приравнивая коэфициенты при **i**, **j**, **k** в правой и левой частях каждого векторного равенства. Приравнивая коэфициенты при **i**, получим

$$\left.\begin{aligned}\frac{dt_x}{ds} &= k(s)\,n_x,\\ \frac{dn_x}{ds} &= \varkappa(s)\,b_x - k(s)\,t_x,\\ \frac{db_x}{ds} &= -\varkappa(s)\,n_x.\end{aligned}\right\} \tag{308'}$$

Точно такую же тройку равенств мы получим для проекций на ось Y и на ось Z, приравнивая коэфициенты при **j** и **k**. Полученные девять равенств будут эквивалентны формулам (308), представляя собой формулы Френе в координатной форме.

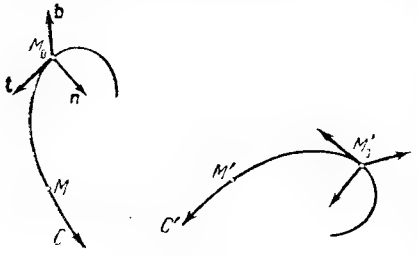
Будем считать функции $k(s)$, $\varkappa(s)$ данными (и непрерывными), а t_x, n_x, b_x неизвестными функциями от s. От геометрического смысла этих функций и самого аргумента s совершенно отвлечемся. Тогда

к системе дифференциальных уравнений (308′) мы вправе будем применить выше формулированную теорему анализа, которая примет такую форму:

Функции t_x, n_x, b_x от s, удовлетворяющие уравнениям (308′) *и, кроме того, при $s=0$ принимающие фиксированные заранее значения, существуют во всей области изменения s и определяются единственным образом.*

Этот результат при ссылках на него в этом параграфе мы будем коротко называть леммой. Переходим к изучению геометрической роли натуральных уравнений.

Основная теорема. *Для того чтобы две кривые C и C' отличались лишь положением в пространстве* (черт. 73), *необходимо (после согласования начальных точек и направлений отсчета s) и достаточно, чтобы их натуральные уравнения имели один и тот же вид.*



Черт. 73.

Мы говорим, что кривые C и C' отличаются лишь положением в пространстве, если одну из них можно совместить с другой путем ее непрерывного передвижения в пространстве как твердого тела. Таким образом совпадение натуральных уравнений необходимо и достаточно, чтобы кривые геометрически имели одну и ту же форму. Переходим к доказательству.

Необходимость. Пусть в результате передвижения C как твердого тела нам удалось совместить ее с C'. Тем самым между точками C и C' установлено взаимно однозначное соответствие. Выберем за начальные точки отсчета на кривых C и C' соответственные точки M_0 и M_0' (совпадающие при совмещении кривых) и аналогичным образом согласуем направления отсчета дуги s на обеих кривых. Тогда для любой пары соответственных точек M и M' значения s будут одни и те же, так как, при совмещении C и C', M_0 попадает в M_0', M — в M', и длины дуг $\overset{\frown}{M_0M}$ и $\overset{\frown}{M_0'M'}$ оказываются одинаковыми.

Далее, если трехгранники Френе, связанные с кривой C в каждой ее точке, передвигать совместно с ней как одно твердое тело, то они, очевидно, остаются все время трехгранниками Френе для передвигаемой кривой. Действительно, так как при движении твердого тела все расстояния между точками остаются без изменения, то не меняются и порядки касания кривых с кривыми и поверхностями. Поэтому касательная прямая и соприкасающаяся плоскость в каждой точке кривой остаются таковыми и во все время движения; следовательно, то же самое относится и к трехгранникам Френе. Отсюда ясно, что угол $\Delta\varphi$ между касательными (или бинормалями) в двух точках кривой при движении кривой как твердого тела остается без изменения. Так как

длина дуги Δs между этими точками тоже не меняется, то не меняется и $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ — средняя скорость вращения касательной (или бинормали) на данном участке кривой, и (после перехода к пределу) мы можем утверждать, что кривизна и кручение в каждой точке кривой сохраняют свои значения (по модулю). Наконец, знак кручения также не может измениться скачком на обратный ввиду непрерывности движения.

Поэтому, передвинув C, мы сохраним в точке M прежние значения кривизны k и кручения $\varkappa$, но так как кривая C с точкой M совместится с кривой C' с точкой M', то эти значения совпадут со значениями k и $\varkappa$ в точке M' кривой C'.

Итак, в соответствующих точках кривых C и C' мы имеем одинаковые значения s, k, $\varkappa$. Следовательно, вид функциональных зависимостей (306) должен быть один и тот же для обеих кривых: при равных s у нас должны определяться всегда одни и те же значения k и $\varkappa$.

Достаточность. Нам дано, что натуральные уравнения (306) кривых C и C' одинаковы. Передвинем C как твердое тело так, чтобы начальная точка отсчета M_0 совместилась с начальной точкой M_0'. Этого можно достичь параллельным смещением на вектор M_0M_0'. После этого повернем C как твердое тело около точки M_0 (совпавшей с M_0') так, чтобы трехгранники Френе для кривых C и C' в этой точке совпали между собой. Конечно, правую тройку единичных взаимно ортогональных векторов можно перевести вращением в любую другую такую же тройку.

Итак, непрерывным движением кривой C мы добились совпадения точки M_0 и трехгранника Френе в ней с точкой M_0' и трехгранником Френе в ней. Мы покажем, что при этом кривая C целиком совпадет с C', чем и будет доказана наша теорема. Вдоль кривой C' и вдоль передвинутой кривой C векторы $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ можно рассматривать как функции служащей параметром дуги s. При $s=0$ мы попадаем на кривой C' в точку M_0', а на передвинутой кривой C — в передвинутую точку M_0, т. е. в ту же самую точку M_0'. Но так как, кроме того, трехгранник Френе в точке M_0 совпал после передвижения C с трехгранником в точке M_0', то значения $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ будут при $s=0$ тоже одинаковы для обеих кривых. Итак, при $s=0$ на кривой C' и на передвинутой кривой C мы имеем одинаковые значения вектор-функций $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$. Тем самым при $s=0$ принимают одинаковые значения и проекции этих вектор-функций t_x, n_x, b_x и т. д., которые также являются функциями от s, но уже скалярными. Но функции t_x, n_x, b_x вдоль обеих кривых удовлетворяют, кроме того, *одной и той же* системе уравнений (308).

Действительно, вид функций $k(s)$ и $\varkappa(s)$ будет одинаков для обеих кривых, поскольку он был одинаков для кривых C и C' и при передвижении кривой C не менялся (последнее вытекает из проведенного уже доказательства необходимости).

Итак, для обеих кривых функции t_x, n_x, b_x удовлетворяют уравнениям (308) с одинаковыми коэфициентами и при $s=0$ принимают одинаковые значения. На основании леммы (в той ее части, где говорится об единственности) мы можем утверждать, что вид функций $t_x(s)$, $n_x(s)$, $b_x(s)$ будет одинаков вдоль обеих кривых: C' и передвинутой C. То же самое относится, разумеется, и к проекциям на оси Y и Z. Теперь, вдоль любой кривой

$$\mathbf{t}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\frac{dx}{ds}\,\mathbf{i}+\frac{dy}{ds}\,\mathbf{j}+\frac{dz}{ds}\,\mathbf{k}$$

и, следовательно,

$$t_x=\frac{dx}{ds},$$

$$dx=t_x\,ds,$$

$$x(s)=\int t_x(s)\,ds.$$

Таким образом при данной функции $t_x(s)$ функция $x(s)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого, так что $x(s)$ для C' и для передвинутой C отличаются на постоянную. Но так как при $s=0$ мы попадаем на обеих кривых в одну и ту же точку M_0, то значения $x(0)$ одинаковы для обеих кривых, а следовательно, постоянная, на которую они отличаются, есть нуль. В итоге $x(s)$ имеет один и тот же вид вдоль обеих кривых. То же относится, разумеется, и к $y(s)$ и $z(s)$. Обе кривые имеют одно и то же параметрическое представление, и следовательно, передвинутая C действительно совпала с C'. Теорема доказана.

Чтобы полностью выяснить роль натуральных уравнений, необходимо формулировать еще один важный дополнительный результат:

Если в некоторой области изменения независимого переменного s, $S_0\leqslant s\leqslant S$, заданы две произвольные непрерывные функции

$$\varphi(s)>0 \quad и \quad \psi(s),$$

то всегда можно построить пространственную кривую, для которой натуральные уравнения будут иметь вид (в той же области изменения s)

$$k=\varphi(s), \quad \varkappa=\psi(s).$$

Из предыдущего ясно, что такая кривая определяется с точностью до положения в пространстве.

Доказательство начинается с чисто аналитических рассуждений, поскольку кривой нет и ее требуется еще построить. Построим прежде всего девять функций аргумента s:

$$\left.\begin{array}{lll} t_x, & t_y, & t_z, \\ n_x, & n_y, & n_z, \\ b_x, & b_y, & b_z. \end{array}\right\} \tag{309}$$

Этим функциям мы не приписываем никакого геометрического смысла, рассматривая их с чисто аналитической точки зрения. Наложим на них

следующие требования. Функции первого столбца должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \frac{dt_x}{ds} &= \varphi(s)\, n_x, \\ \frac{dn_x}{ds} &= \psi(s)\, b_x - \varphi(s)\, t_x, \\ \frac{db_x}{ds} &= -\psi(s)\, n_x. \end{aligned}\right\} \tag{310}$$

Таким же уравнениям подчиняем функции второго и третьего столбца (механически заменяя везде в (310) значок x на y и на z). Требуем, кроме того, чтобы при $s=0$ функции (309) принимали значения

$$\left.\begin{aligned} &1\ 0\ 0, \\ &0\ 1\ 0, \\ &0\ 0\ 1. \end{aligned}\right\} \tag{311}$$

Применяем теперь лемму к функциям t_x, n_x, b_x. Так как уравнения (310) отличаются от (308′) только обозначениями φ и ψ вместо k и $\varkappa$ и так как для t_x, n_x, b_x указаны значения при $s=0$, то применение леммы здесь законно. Мы можем утверждать, что функции t_x, n_x, b_x, удовлетворяющие выставленным требованиям, действительно существуют во всей области изменения s. То же относится, конечно, и к функциям второго и третьего столбцов матрицы (309).

Итак, функции (309) построены. Докажем, что при любом значении s матрица (309) будет ортогональной. Составим произведение двух каких-нибудь ее столбцов, например

$$t_x t_y + n_x n_y + b_x b_y,$$

и продифференцируем его по s. Получим

$$\frac{d}{ds}(t_x t_y + n_x n_y + b_x b_y) = \frac{dt_x}{ds} t_y + t_x \frac{dt_y}{ds} + \\ + \frac{dn_x}{ds} n_y + n_x \frac{dn_y}{ds} + \frac{db_x}{ds} b_y + b_x \frac{db_y}{ds}.$$

Тождественное обращение этой производной в нуль легко проверить, заменяя производные от t_x, n_x, b_x их выражениями из (310) и аналогично поступая с производными от t_y, n_y, b_y.

Итак, произведение каких-либо двух столбцов матрицы (309) остается постоянным при любом значении s. Но так как при $s=0$ матрица (309) принимает вид (311), то при $s=0$ это произведение равно нулю, а следовательно, остается нулем и при любом значении s.

Совершенно таким же образом, составляя произведение какого-нибудь столбца на себя, например

$$t_x^2 + n_x^2 + b_x^2,$$

и дифференцируя это выражение по s, получаем производную, равную нулю. Следовательно, выписанное выражение остается постоянным, а так

как из (311) видно, что при $s=0$ оно равно единице, то и при любом s оно сохраняет это значение.

Итак, попарные произведения разных столбцов матрицы (309) дают нуль, а одинаковых — единицу. Это и означает, что матрица ортогональная [1]).

Построим вектор-функции $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ того же аргумента s, определив их формально равенствами

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{t}&=t_x\mathbf{i}+t_y\mathbf{j}+t_z\mathbf{k},\\ \mathbf{n}&=n_x\mathbf{i}+n_y\mathbf{j}+n_z\mathbf{k},\\ \mathbf{b}&=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}.\end{aligned}\right\}\tag{312}$$

Никакого геометрического смысла мы им пока не приписываем. Составляя их скалярные произведения и скалярные квадраты

$$\mathbf{tn}=t_xn_x+t_yn_y+t_zn_z \text{ и т. д.},$$
$$\mathbf{t}^2=t_x^2+t_y^2+t_z^2 \text{ и т. д.},$$

мы видим, что получаются попарные произведения строк ортогональной матрицы (309) и, следовательно,

$$\mathbf{tn}=\mathbf{nb}=\mathbf{bt}=0 \quad \text{и} \quad \mathbf{t}^2=\mathbf{n}^2=\mathbf{b}^2=1.$$

Вектор-функции $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ образуют, следовательно, тройку единичных взаимно ортогональных векторов [2]). Легко убедиться также, что вектор-функции (312) удовлетворяют диференциальным уравнениям

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\mathbf{t}}{ds}&=\varphi(s)\,\mathbf{n},\\ \frac{d\mathbf{n}}{ds}&=\psi(s)\,\mathbf{b}-\varphi(s)\,\mathbf{t},\\ \frac{d\mathbf{b}}{ds}&=-\psi(s)\,\mathbf{n}.\end{aligned}\right\}\tag{313}$$

Действительно, подставляя сюда вместо $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ их разложения и сравнивая коэфициенты при $\mathbf{i}$ в левых и правых частях, мы приходим к уравнениям (310), которые уже имеют место. Таким образом составляющие по $\mathbf{i}$ в левых и правых частях (313) действительно равны, и по совершенно аналогичным причинам мы получим то же самое и для составляющих по $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$.

Теперь, наконец, мы переходим к построению искомой кривой. Мы определим ее параметрическим представлением

$$x=\int t_x(s)\,ds,\quad y=\int t_y(s)\,ds,\quad z=\int t_z(s)\,ds.\tag{314}$$

---

[1]) Определитель такой матрицы может быть только ± 1. Но так как при $s=0$, как видно из (311), этот определитель равен $+1$, а при изменении s меняется непрерывно, то он остается равным $+1$ при любом s.

[2]) Так как определитель матрицы (309) равен $+1$, то вектор-функции $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ образуют правую тройку (мы считаем, что координатная тройка $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — правая).

Так как t_x, t_y, t_z — уже построенные функции от s, то формулы (314) определяют нам текущие координаты x, y, z, как функции некоторого параметра s во всей области его изменения, и тем самым некоторую кривую в пространстве. При этом мы не знаем заранее, будет ли этот параметр вдоль построенной кривой играть роль длины дуги и будут ли ранее построенные нами вектор-функции $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ играть роль основных векторов трехгранника Френе для этой кривой. Все это нам предстоит доказать.

Запишем выражение текущего радиуса-вектора вдоль нашей кривой:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{i}\int t_x\,ds + \mathbf{j}\int t_y\,ds + \mathbf{k}\int t_z\,ds.$$

Диференцируя, получим

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}\,t_x\,ds + \mathbf{j}\,t_y\,ds + \mathbf{k}\,t_z\,ds = \mathbf{t}(s)\,ds. \tag{315}$$

Беря обе части равенства по модулю и учитывая, что $\mathbf{t}(s)$ есть вектор единичный, мы получим

$$|d\mathbf{r}| = |ds|.$$

Сравнивая эту формулу с (158″), мы видим, что ds есть, действительно, диференциал длины дуги и, следовательно, параметр s играет роль длины дуги вдоль кривой. Теперь формулу (315) можно переписать в виде

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t}(s),$$

откуда ясно, что введенная ранее вектор-функция $\mathbf{t}(s)$ играет роль единичного касательного вектора к построенной нами кривой.

Нам известно, что в таком случае производная $\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds}$ направлена по главной нормали к кривой в положительную сторону. Первая из формул (313) показывает, что единичный вектор $\mathbf{n}(s)$, отличаясь от $\frac{d\mathbf{t}(s)}{ds}$ лишь положительным множителем $\varphi(s)$, будет направлен в том же направлении. Итак, введенная ранее вектор-функция $\mathbf{n}$ играет роль единичного вектора в положительном направлении главной нормали для построенной кривой. Наконец, введенная ранее вектор-функция $\mathbf{b}(s)$, единичная и ортогональная к $\mathbf{t}(s)$ и $\mathbf{n}(s)$, будет вследствие этого единичным вектором, направленным по бинормали и при этом в ту сторону, которая предписывается формулой (251). Итак, вектор-функции $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ оказались для построенной нами кривой векторами трехгранника Френе. Мы можем написать для этой кривой формулы Френе, которые будут иметь обычный вид (262). Сравнивая их с формулами (313), которым удовлетворяют те же вектор-функции, мы убеждаемся, что вдоль построенной кривой

$$k = \varphi(s), \quad \varkappa = \psi(s).$$

Нам действительно удалось построить кривую с наперед заданным видом функциональной зависимости кривизны и кручения от длины

дуги. Конечно, такая кривая будет не единственной, она будет определена с точностью до положения в пространстве. В процессе построения это сказалось, во-первых, в произвольных постоянных в интегралах (314), во-вторых, в произвольном выборе начального вида ортогональной матрицы (309) при $s=0$. Для простоты мы взяли, правда, вполне определенный начальный вид (311), но можно было бы взять вместо (311) любую ортогональную матрицу с постоянными элементами.

Примеры и упражнения.

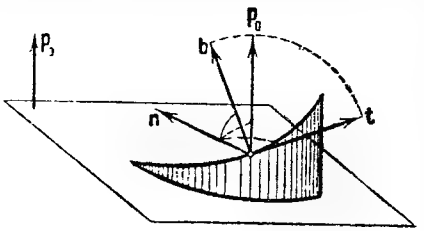
1. Натуральные уравнения кривой имеют вид

$$k=k(s), \quad \varkappa=0.$$

Мы знаем уже из предыдущего (см. конец § 29), что это необходимо и достаточно для того, чтобы кривая была плоской. Таким образом особенность натуральных уравнений плоской кривой в том, что вторая функция дуги s, выражающая кручение, обращается тождественно в нуль.

Остается в рассмотрении первая функция, выражающая кривизну. Как раз такое положение вещей мы имели, специально изучая натуральное уравнение кривой на плоскости. Разница только в том, что тогда кривизне k мы условились определенным образом приписывать знак $\pm$, а теперь у нас k всегда больше нуля. В связи с этим зеркально симметрические плоские кривые имели тогда различные натуральные уравнения (функции $k(s)$ отличались знаком), теперь же они будут иметь одни и те же натуральные уравнения. Это расхождение имеет интересный геометрический смысл. Дело в том, что, оставаясь в плоскости, нельзя непрерывным движением совместить зеркально симметрические плоские кривые. Но рассматривая эти кривые в пространстве, их можно совместить поворотом на 180° около оси симметрии, так что с этой точки зрения они отличаются только положением в пространстве. Поэтому и натуральные уравнения их теперь одинаковы.

Интересно выяснить, в связи с этим, в чем будет разница в натуральных уравнениях зеркально симметрических пространственных (существенно неплоских) кривых. Примем для простоты плоскость симметрии за координатную плоскость XY. Тогда в соответствующих точках симметрически расположенных кривых значения x, y будут одинаковы, а значения z будут отличаться знаком. Пользуясь формулами (282), мы видим, что при изменении знака у z кривизна k не изменится, а кручение $\varkappa$ изменит знак на обратный. Таким образом *натуральные уравнения зеркально симметрических кривых отличаются лишь знаком у функции* $\varkappa(s)$. В случае существенно неплоских кривых, т. е. в случае $\varkappa\neq 0$, такие натуральные уравнения будут существенно различны, что связано с невозможностью совместить неплоские зеркально симметрические кривые непрерывным движением в пространстве.



Черт. 74.

2. *Линии откоса.* Рассмотрим кривую, обладающую тем свойством, что касательные к ней образуют постоянный угол с некоторым определенным направлением. Если это направление наглядно представлять себе как вертикальное, то касательная к нашей кривой (которую мы будем называть линией откоса) будет направлена под постоянным углом к горизонтальной плоскости, так что крутизна подъема по кривой будет все время одинакова.

Выясним, какими особенностями будут обладать натуральные уравнения линий откоса. Пусть $\mathbf{p}_0$ будет постоянным единичным вектором, взятым по

указанному направлению, так что $\mathbf{p}_0$ образует с единичным касательным вектором $\mathbf{t}(s)$ постоянный угол φ во всех точках кривой (черт. 74). Так как косинус этого угла равен скалярному произведению $\mathbf{t}$ на $\mathbf{p}_0$, то мы можем записать

$$\mathbf{tp}_0 = \text{const}.$$

Дифференцируя это равенство по s и учитывая, что $\mathbf{p}_0$ — постоянный вектор, получим

$$\dot{\mathbf{t}}\mathbf{p}_0 = 0 \quad \text{или} \quad k\mathbf{np}_0 = 0.$$

Считая $k \neq 0$, т. е. исключая случай, когда линия откоса прямая, получаем

$$\mathbf{np}_0 = 0. \tag{316}$$

Таким образом главные нормали к линии откоса идут перпендикулярно постоянному направлению $\mathbf{p}_0$, в наглядном представлении — параллельно горизонтальной плоскости. Так как вектор $\mathbf{p}_0$ в каждой точке кривой идет перпендикулярно $\mathbf{n}$, то $\mathbf{p}_0$ можно поместить в спрямляющей плоскости, т. е. в плоскости векторов $\mathbf{t}$, $\mathbf{b}$. А так как $\mathbf{t}$ образует с $\mathbf{p}_0$ постоянный угол φ, то и $\mathbf{b}$, перпендикулярный к $\mathbf{t}$, образует с $\mathbf{p}_0$ постоянный угол, так что скалярное произведение $\mathbf{b}$ на $\mathbf{p}_0$, равное косинусу этого угла, остается постоянным:

$$\mathbf{bp}_0 = \text{const}.$$

Дифференцируем теперь (316) еще раз по s. Получим

$$\dot{\mathbf{n}}\mathbf{p}_0 = 0 \quad \text{или} \quad (\varkappa\mathbf{b} - k\mathbf{t})\,\mathbf{p}_0 = 0,$$

откуда

$$\varkappa\mathbf{bp}_0 - k\mathbf{tp}_0 = 0$$

или

$$\frac{\varkappa}{k} = \frac{\mathbf{tp}_0}{\mathbf{bp}_0}.$$

Мы видим, что правая часть равенства есть величина постоянная. Следовательно, *для линий откоса отношение кручения к кривизне*:

$$\varkappa(s) : k(s),$$

остается вдоль кривой постоянным. В этом состоит ограничение, наложенное на натуральные уравнения кривой. Покажем, что этот признак не только необходим, но и достаточен.

Действительно, пусть нам известно, что вдоль кривой

$$\frac{\varkappa}{k} = \text{const}. \tag{317}$$

Составим теперь вектор

$$\mathbf{b} + \frac{\varkappa}{k}\mathbf{t}. \tag{318}$$

Очевидно, что в силу (317) этот вектор неизменно связан с векторами $\mathbf{t}$, $\mathbf{b}$, образуя с ними постоянные углы и имея постоянную длину. Покажем теперь, что сам вектор (318) остается постоянным вдоль кривой. Для этой цели дифференцируем его по s; учитывая (317), мы получаем

$$\dot{\mathbf{b}} + \frac{\varkappa}{k}\dot{\mathbf{t}} = -\varkappa\mathbf{n} + \frac{\varkappa}{k}k\mathbf{n} = 0.$$

Итак, вектор (318) есть вектор постоянный и образует, кроме того, постоянный угол с $\mathbf{t}$, т. е. с касательной к кривой. Кривая есть, таким образом, линия откоса; единичный вектор в направлении (318) совпадает с $\mathbf{p}_0$.

3. Найти кривую, натуральные уравнения которой имеют вид

$$k = k_0 > 0, \quad \varkappa = \varkappa_0,$$

где k_0 и $\varkappa_0$—постоянные.

Мы уже знаем, что винтовая линия (см. конец § 30) обладает этим свойством; легко проверить, что, положив

$$a = \frac{k_0}{k_0^2 + \varkappa_0^2}, \quad b = \frac{\varkappa_0}{k_0^2 + \varkappa_0^2},$$

мы получим винтовую линию с наперед заданными значениями кривизны k_0 и кручения $\varkappa_0$.

Все остальные кривые с тем же свойством будут отличаться от этой винтовой линии лишь положением в пространстве (согласно общей теореме § 33).

4. Кривая C называется *кривой Бертрана*, если для нее можно указать отличную от нее кривую C^*, обладающую общими с C главными нормалями.

Пусть $\mathbf{r}(s)$ — радиус-вектор кривой C; так как в любой ее точке M главная нормаль служит главной нормалью и для C^*, то, сместившись по главной нормали на какое-то расстояние a, мы попадем в соответствующую точку M^* на C^*. Запишем:

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + a\mathbf{n},$$

где $\mathbf{r}^*$ — радиус-вектор точки M^*. Вычислим $\dot{\mathbf{r}}^*$ (точкой обозначаем дифференцирование по дуге s вдоль кривой C):

$$\dot{\mathbf{r}}^* = \mathbf{t} + \dot{a}\mathbf{n} + a(\varkappa\mathbf{b} - k\mathbf{t}). \tag{319}$$

Так как касательная $\dot{\mathbf{r}}^*$ к кривой C^* ортогональна к общей главной нормали $\mathbf{n}$, то $\dot{\mathbf{r}}^*\mathbf{n} = 0$, т. е. в силу (319)

$$\dot{a} = 0, \quad a = \text{const}.$$

Итак,

$$\dot{\mathbf{r}}^* = \mathbf{t}(1 - ak) + a\varkappa\mathbf{b}. \tag{320}$$

Дифференцируем $\dot{\mathbf{r}}^*$ еще раз по s; пользуясь формулами Френе, получим

$$\ddot{\mathbf{r}}^* = k\mathbf{n}(1 - ak) + \mathbf{t}(1 - a\dot{k}) + a\dot{\varkappa}\mathbf{b} - a\varkappa^2\mathbf{n}. \tag{321}$$

Так как соприкасающаяся плоскость к C^* должна заключать векторы $\dot{\mathbf{r}}^*$, $\ddot{\mathbf{r}}^*$ и общую главную нормаль $\mathbf{n}$, то эти три вектора должны быть компланарны, что имеет место тогда и только тогда, когда векторы $[\dot{\mathbf{r}}^*, \mathbf{n}]$ и $[\ddot{\mathbf{r}}^*, \mathbf{n}]$ коллинеарны. Но, в силу формул (320) и (321),

$$[\dot{\mathbf{r}}^*, \mathbf{n}] = (1 - ak)\mathbf{b} - a\varkappa\mathbf{t},$$

$$[\ddot{\mathbf{r}}^*, \mathbf{n}] = (1 - ak)\dot{\mathbf{b}} - a\dot{\varkappa}\mathbf{t}.$$

Коллинеарность этих векторов означает, что

$$\frac{(1 - ak)'}{1 - ak} = \frac{a\dot{\varkappa}}{a\varkappa}, \quad \text{т. е.} \quad \left(\frac{1 - ak}{\varkappa}\right)' = 0, \quad \frac{1 - ak}{\varkappa} = b = \text{const}.$$

Итак, кривизна $k(s)$ и кручение $\varkappa(s)$ вдоль кривой Бертрана связаны линейным соотношением

$$ak + b\varkappa = 1,$$

где $a \neq 0$ и b — постоянные.

Это ограничение, наложенное на натуральные уравнения кривой Бертрана, не только необходимо (что мы показали), но и достаточно. В самом деле, если оно имеет место для данной кривой C при некоторых определенных a и b, то мы откладываем по главной нормали отрезок a; конец его описывает новую кривую C^*. Повторением предыдущих выкладок убеждаемся, что C^* имеет главные нормали, общие с C, т. е. C есть кривая Бертрана (как, разумеется, и C^*).

Выясним геометрический смысл постоянного b.

Перепишем выражение для $\dot{\mathbf{r}}^*$:

$$\dot{\mathbf{r}}^* = \mathbf{t}(1 - ak) + a\varkappa\mathbf{b} = \varkappa(b\mathbf{t} + a\mathbf{b}). \tag{322}$$

Так как главные нормали кривых C и C^* общие, то плоскости векторов $\mathbf{t}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{t}^*$, $\mathbf{b}^*$ параллельны. Формула (322) показывает, что

$$\frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\theta,$$

где θ — угол, образуемый направлением касательной к C^*, т. е. вектором $\dot{\mathbf{r}}^*$, с направлением касательной к C, т. е. вектором $\mathbf{t}$ (считая положительным направление вращения от $\mathbf{t}$ к $\mathbf{b}$). Итак, *трехгранники Френе для C и C^* имеют общую главную нормаль и сохраняют друг относительно друга неизменное положение* (расстояние a между их вершинами по общей главной нормали и угол θ между направлениями касательных остаются постоянными вдоль этих кривых).

Нужно иметь в виду, что $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}^*$ могут как совпадать, так и отличаться направлением (в зависимости от знака выражения $\varkappa(bk - a\varkappa)$; в первом случае кривизна и кручение связаны для C^* уравнением $-ak^* + b\varkappa^* = 0$, а во втором — уравнением $ak^* + b\varkappa^* = 1$ (доказать).

Интересен частный случай кривых Бертрана, когда

$$b = 0, \quad \text{т. е.} \quad ak = 1, \quad k = \frac{1}{a} = \text{const},$$

т. е. когда кривая Бертрана оказывается пространственной *кривой постоянной кривизны* (*косая окружность*). Обратно, всякую косую окружность можно рассматривать как частный случай кривой Бертрана, когда $b = 0$. В этом случае смещение на a по главной нормали приводит нас, очевидно, в *центр кривизны*, так что C^* *есть геометрическое место центров кривизны для* C; тем же свойством обладает и C по отношению к C^*, причем C^* будет тоже косой окружностью с той же постоянной кривизной $\frac{1}{a}$ (доказать).

Формула $\operatorname{ctg}\theta = \frac{b}{a}$ дает нам в этом случае $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, так что или $\mathbf{t}^* = \mathbf{b}$, $\mathbf{b}^* = \mathbf{t}$, или $\mathbf{t}^* = -\mathbf{b}$, $\mathbf{b}^* = -\mathbf{t}$; при этом всегда $\mathbf{n}^* = -\mathbf{n}$ (доказать).

ГЛАВА V.

ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

§ 34. Криволинейные координаты на поверхности.

В § 24 мы рассматривали поверхность, заданную уравнением

$$F(x, y, z) = 0. \tag{323}$$

Мы ограничивались при этом заведомо обыкновенными точками, т. е. такими, где по крайней мере одна из частных производных F_x, F_y, F_z

отлична от нуля. Вблизи такой точки уравнение (323) можно переписать в виде, разрешенном относительно одной координаты, например

$$z = f(x, y), \tag{323'}$$

что дает нам ясное представление о поведении поверхности.

При изучении поверхностей, как и при изучении кривых, наиболее целесообразным способом их задания является параметрическое представление. Пусть нам дана вектор-функция двух скалярных аргументов u, v, рассматриваемых в некоторой области их изменения:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}. \tag{324}$$

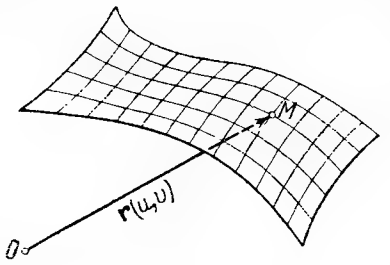
Здесь x, y, z — координаты этой вектор-функции, также являющиеся функциями u, v.

Будем откладывать $\mathbf{r}(u, v)$ из начала координат O. Конец вектора $\mathbf{r}(u, v)$, который мы будем обозначать через M, имеет своим радиус-вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \tag{325}$$

и своими координатами

$$\left.\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v), \\ z &= z(u, v). \end{aligned}\right\} \tag{325'}$$



Черт. 75.

Когда u, v пробегают область своего изменения, точка M с координатами (325'), или, что то же, с радиусом-вектором (325), описывает некоторое геометрическое место точек, которое мы будем называть *поверхностью в параметрическом представлении* (черт. 75). Каждой паре значений u, v из области их изменения отвечает точка поверхности. В дальнейшем, говоря о точке поверхности, мы всегда подразумеваем задание определяющих ее значений u и v.

Возьмем частные производные радиуса-вектора $\mathbf{r}$ по u и v, пользуясь разложением (324):

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}_u(u, v) &= x_u(u, v)\,\mathbf{i} + y_u(u, v)\,\mathbf{j} + z_u(u, v)\,\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_v(u, v) &= x_v(u, v)\,\mathbf{i} + y_v(u, v)\,\mathbf{j} + z_v(u, v)\,\mathbf{k}. \end{aligned}\right\} \tag{326}$$

Во всем дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь таких точек поверхности, где векторы $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ не коллинеарны [1]):

$$\mathbf{r}_u \neq \mathbf{r}_v. \tag{327}$$

Коллинеарность $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ означала бы пропорциональность координат этих векторов, т. е. пропорциональность элементов в строках

$$\left.\begin{aligned} &x_u, \quad y_u, \quad z_u; \\ &x_v, \quad y_v, \quad z_v. \end{aligned}\right\} \tag{328}$$

[1]) В частности, ни один из них не обращается в нуль.

Поэтому условие (327) означает, что в данной точке эта пропорциональность не имеет места и, следовательно, среди определителей 2-го порядка, получающихся из матрицы (328), по крайней мере один отличен от нуля. Пусть, для определенности, в данной точке, т. е. при данных значениях u, v, отличен от нуля первый из них:

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0. \tag{328'}$$

Как известно из анализа (см. Г у р с а, т. I, § 38), если функции $x(u, v)$, $y(u, v)$ при данных значениях u, v удовлетворяют условиям (328'), то вблизи данных значений u, v и соответствующих им x, y уравнения

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

могут быть эквивалентным образом переписаны в виде, разрешенном относительно u, v,

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \tag{329}$$

После того как первые два из уравнений (325') приняли такой вид, можно вставить эти выражения для u и v в последнее; получим

$$z = z\{u(x, y), v(x, y)\} \text{ или, короче, } z = f(x, y). \tag{330}$$

Итак, мы пришли к записи уравнения поверхности вблизи рассматриваемой точки в виде (323'). Таким образом *соблюдение в данной точке поверхности* (325) *условия* $\mathbf{r}_u \nparallel \mathbf{r}_v$ *гарантирует нам, что эта точка поверхности будет обыкновенной, т. е. что вблизи этой точки уравнение поверхности может быть записано в виде, разрешенном относительно одной координаты, например* $z = f(x, y)$.

Мы обнаружили, таким образом, что вблизи своих точек, где выполняется условие (327) $\mathbf{r}_u \nparallel \mathbf{r}_v$ (мы их будем называть заведомо обыкновенными) поверхность (325) ведет себя совершенно так же, как и поверхность (323) вблизи своих заведомо обыкновенных точек. Нужно отметить только, что для поверхности (323) термин „вблизи" означает, что берутся значения x, y, z, достаточно близкие к данным их значениям, для поверхности же (325) подразумевается, кроме того, что и значения u, v рассматриваются только достаточно близкие к значениям их в данной точке.

Во всем дальнейшем мы будем интересоваться поведением поверхности (325) *лишь вблизи ее заведомо обыкновенных точек.* В таком случае первые два из уравнений (325') могут быть переписаны в виде (329)

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Это означает, что не только каждой паре значений u, v однозначно отвечает точка поверхности, как показывают сами уравнения (325'), но и, обратно, каждой точке поверхности x, y, z однозначно отвечает пара значений параметров u, v.

Таким образом *вблизи заведомо обыкновенной точки поверхности* (325) *мы имеем взаимно однозначное соответствие между точками*

поверхности и парами значений u, v из соответствующей области изменения u, v. На этом основании параметры называются *криволинейными координатами* на поверхности.

Оговорка „вблизи заведомо обыкновенной точки" существенна в том смысле, что в противном случае уравнения (325′) могут привести нас при других значениях u, v к той же самой точке x, y, z [1]), благодаря чему нарушится *взаимная* однозначность соответствия (одной точке будут отвечать две пары значений u, v).

В последующем, если не оговорено противное, *мы будем подразумевать, что для рассматриваемого куска поверхности налицо взаимно однозначное соответствие с некоторой областью изменения параметров u, v, и во всех точках соблюдается условие* (327).

Мы видим, что роль криволинейных координат u, v заключается только в том, чтобы отмечать точки поверхности. В общем случае криволинейные координаты геометрического смысла не имеют и могут выбираться различными способами на одной и той же поверхности. Действительно, введем наряду с параметрами u, v новые переменные U, V, связанные с u, v функциональной зависимостью

$$U = U(u, v), \quad V = V(u, v). \tag{331}$$

Вид этих функций берем совершенно произвольно, требуя, однако, чтобы в рассматриваемой области изменения u, v и в соответствующей ей области изменения U, V написанные уравнения были однозначно разрешимы относительно u, v, т. е. чтобы их можно было эквивалентным образом переписать в виде

$$u = u(U, V), \quad v = v(U, V). \tag{331′}$$

В таком случае область изменения переменных u, v, с одной стороны, и область изменения переменных U, V, с другой стороны, находятся во взаимно однозначном соответствии. А так как область изменения u, v находится во взаимно однозначном соответствии с рассматриваемым куском поверхности, то и область U, V обладает этим же свойством. Следовательно, переменные U, V в их области изменения можно с таким же правом считать криволинейными координатами на данном куске поверхности, как и переменные u, v. Действительно, каждой паре значений U, V отвечает согласно (331′) пара значений u, v, а этим последним — точка поверхности с радиусом-вектором (325):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}\{u(U, V), v(U, V)\}.$$

Мы получили параметрическое представление поверхности в новых параметрах U, V. Обратно, каждой точке поверхности однозначно отвечает пара значений u, v, а следовательно, согласно (331), и пара значений U, V.

Таким образом *в выборе криволинейных координат на поверхности имеется широкий произвол.* Поэтому, изучая поверхность, заданную

[1]) Самопересечение или самоналожение поверхности.

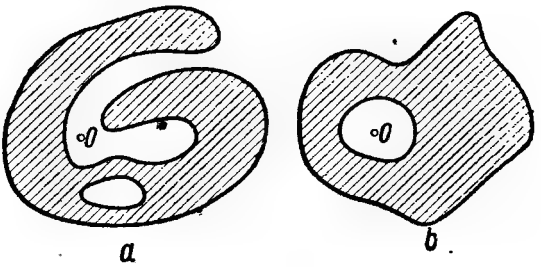
параметрическим представлением (325), нам придется тщательно отделять существенные факты, относящиеся только к самой геометрической форме поверхности, от случайных данных, зависящих от произвольного выбора криволинейных координат на поверхности.

Отметим как частный случай, что на плоскости или в какой-нибудь области на ней можно также ввести общего вида криволинейные координаты. Для этого в данной области достаточно построить произвольные функции u, v прямоугольных декартовых координат x, y:

$$u = u(x, y),$$
$$v = v(x, y).$$

При этом требуется, однако, чтобы в рассматриваемой области написанные уравнения были однозначно разрешимы относительно x, y и могли быть, следовательно, переписаны в виде

$$x = x(u, v),$$
$$y = y(u, v).$$



Черт. 76.

В таком случае каждой точке x, y данной области на плоскости однозначно отвечает пара значений u, v из области изменения этих переменных и обратно. Переменные u, v можно считать криволинейными координатами данной области на плоскости.

Элементарным примером криволинейных координат на плоскости служат полярные координаты. Если взятая на плоскости область не содержит полюса и не охватывает его кольцом (черт. 76, a), то полярные координаты удовлетворяют требованию взаимно однозначного соответствия с точками области. Точнее: фиксируя значения полярного угла φ и полярного радиуса r в одной точке и непрерывно изменяя их при перемещении по области, мы при любом выборе пути припишем каждой точке одну и ту же однозначно определенную пару значений φ, r.

Напротив, если область содержит полюс O или охватывает его (как на черт. 76, b), то при каждом обходе вокруг полюса мы возвращаемся в прежнюю точку области со значением φ, измененным на 2π. Взаимная однозначность соответствия нарушается. Из общих определений вытекает, что при теоретическом рассмотрении мы считаем такого рода случаи исключенными.

Укажем еще на географическую широту φ и долготу θ ($-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$; $-\pi < \theta \leqslant \pi$), как на пример криволинейных координат на

сфере. Взаимная однозначность соответствия имеет место при условии, что с поверхности сферы удален меридиан $\theta = \pm\pi$, включая и его концы (северный и южный полюсы).

§ 35. Кривые на поверхности.

Рассмотрим на поверхности геометрическое место точек, криволинейные координаты которых определяются уравнениями

$$u = u(t), \quad v = v(t), \tag{332}$$

где t — независимое переменное. Пользуясь параметрическим представлением поверхности (325), можно записать радиус-вектор любой такой точки в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t)). \tag{333}$$

Таким образом $\mathbf{r}$ выражается в конечном итоге как функция одного аргумента t и, когда t пробегает область своего изменения, $\mathbf{r}$ описывает своим концом некоторую кривую в пространстве. Уравнения (332) определяют, таким образом, на поверхности некоторую кривую.

В частности, в уравнениях (332) параметром t может служить одна из криволинейных координат, например $t = u$. Тогда пара уравнений (332) сводится к одному

$$v = v(u). \tag{334}$$

С данной системой криволинейных координат на поверхности наиболее непосредственно связаны так называемые *координатные линии*, т. е. кривые, вдоль которых одна из координат остается постоянной.

Будем называть линией u кривую, вдоль которой меняется только u. Уравнение такой кривой на поверхности можно записать как частный случай (334):

$$v = \text{const}, \tag{335}$$

считая, что функция $v(u)$ является константой.

Совершенно аналогично уравнение линий v будет

$$u = \text{const}. \tag{336}$$

Так как значение постоянной в правой части уравнений (335) и (336) можно выбирать произвольно, т. е. в первом случае v, а во втором случае u можно закреплять на любом значении, то каждое из уравнений определяет нам целое семейство кривых от одного параметра. Два семейства кривых на поверхности, каждое от одного параметра, называются *сетью* кривых на поверхности. Мы построили, таким образом, координатную сеть. Через каждую точку $M(u_0, v_0)$ на поверхности проходят ровно две линии сети: линия u, получающаяся, если закрепить v на значении v_0 (которое v имеет в точке M),

$$v = v_0,$$

и линия v, вдоль которой u закреплено на значении u_0:

$$u = u_0.$$

На плоскости, в случае прямоугольных декартовых координат, координатная сеть образована всевозможными прямыми, параллельными осям в случае полярных координат — окружностями с центром в полюсе и выходящими из полюса полупрямыми.

Координатная сеть в значительной степени обусловливает выбор системы криволинейных координат, так как, наблюдая линии постоянных значений u и v, можно составить себе некоторое представление о ходе изменения этих параметров, однако — неполное: о численных значениях параметров по виду кривых мы ничего сказать, конечно, не можем. Более точно: сделаем преобразование криволинейных координат на поверхности

$$U = U(u), \quad V = V(v)$$

так, что каждая новая координата зависит только от одной старой, в остальном же преобразование произвольно. Конечно, система координат изменится довольно существенно, но координатная сеть останется прежней, так как если вдоль кривой v постоянное, то $V(v)$ также остается постоянным, и линии u совпадают с линиями U. То же относится и к линиям v, V. Таким образом *координатная сеть определяет криволинейные координаты с точностью до преобразования* $U(u)$, $V(v)$. Другие преобразования здесь, как нетрудно показать, невозможны.

Займемся теперь изучением касательных к кривым, проведенным по поверхности. Пусть на поверхности дана кривая (332). Пользуясь ее параметрическим представлением в пространстве

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}[u(t), v(t)],$$

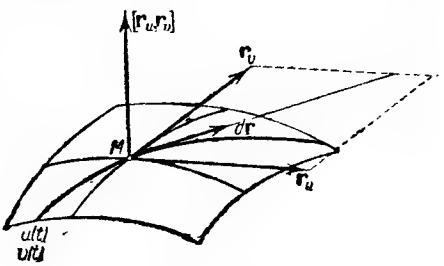
находим диференциал радиуса-вектора

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u(u, v)\,du + \mathbf{r}_v(u, v)\,dv, \tag{337}$$

где

$$du = u'(t)\,dt, \quad dv = v'(t)\,dt. \tag{337'}$$

Как и всегда, $d\mathbf{r}$ направлен по касательной к кривой. Мы видим, что в каждой точке кривой $d\mathbf{r}$ разлагается по векторам $\mathbf{r}_u(u, v)$, $\mathbf{r}_v(u, v)$ и, следовательно, компланарен с ними. Но эти векторы — частные производные от $\mathbf{r}(u, v)$ — зависят только от выбора значений u, v, т. е. от выбора точки на поверхности. Таким образом в какую бы точку на поверхности мы ни пришли, двигаясь по нашей кривой, касательная к кривой будет лежать в одной плоскости с векторами $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ в этой точке (черт. 77).



Черт. 77.

Отсюда следует, что *если через данную точку* $M(u, v)$ *на поверхности проводить по ней всевозможные кривые, то касательные к ним в этой точке расположатся все в одной плоскости, а именно в плоско-*

сти векторов $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$. Мы знаем (см. § 24), что плоскость, в которой расположены все касательные к поверхности в данной точке, называется касательной плоскостью. Таким образом мы подтвердили прежний результат, именно, что такая плоскость существует, и обнаружили, что она определяется векторами $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ в данной точке [напомним, что по условию (327) $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ не коллинеарны].

Что же касается самих векторов $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$, то они направлены по касательным к координатным линиям в данной точке. В самом деле, вдоль координатной линии, например u, значение v остается равным постоянному v_0, и равенство (333) примет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0),$$

где параметром служит независимое переменное u. Так как теперь $dv = 0$, то формула (337) примет вид

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u(u, v_0)\, du.$$

Касательная к линии u направлена по $d\mathbf{r}$, а следовательно, и в направлении коллинеарного с ним вектора $\mathbf{r}_u$.

Аналогично обстоит дело и с линиями v.

Возвращаемся к общему случаю (337). Вектор, характеризующий направление касательной к кривой на поверхности в данной точке M, имеет вид [1])

$$\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv = du\left(\mathbf{r}_u + \frac{dv}{du}\mathbf{r}_v\right).$$

Множитель du не играет роли для направления касательной; векторы $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ зависят только от выбора точки M на поверхности; следовательно, выбор кривой, проведенной по поверхности через точку M, сказывается только в значении частного $dv : du$, где du, dv — дифференциалы криволинейных координат вдоль рассматриваемой кривой. Итак, *если поверхность и точка M на ней даны, то направление касательной к кривой на поверхности в точке M вполне характеризуется отношением дифференциалов $dv : du$, взятых вдоль этой кривой.* (Точнее здесь подразумевается $dv : du = v'(t)\, dt : u'(t)\, dt = v'(t) : u'(t)$, где t — параметр вдоль кривой.) Очевидно, что и, обратно, направление касательной, т. е. направление, параллельное вектору $\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$, определяет этот вектор с точностью до численного множителя, а следовательно, отношение коэфициентов его разложения $dv : du$ определяется этим направлением *однозначно*.

Этот простой результат будет часто применяться в дальнейшем.

Запишем теперь уравнение касательной плоскости в данной точке $M(u, v)$ на поверхности. Так как эта плоскость проходит через

---

[1]) Считая для определенности, что $du \neq 0$. Случай, когда du и dv оба равны нулю, мы устранили, так как рассматриваем на кривой линии заведомо обыкновенные точки, где $d\mathbf{r} \neq 0$.

векторы $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ в данной точке, то она перпендикулярна их векторному произведению

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}. \tag{338}$$

Это векторное произведение, которое вследствие условия (327) будет отлично от нуля, укажет нам, таким образом, направление *нормали* к поверхности в данной точке. Касательную плоскость в точке $M(u, v)$ можно рассматривать как плоскость, проходящую через $M(u, v)$ [декартовы координаты этой точки в пространстве будут $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$] перпендикулярно вектору (338). Обозначая через X, Y, Z текущие координаты по плоскости, нетрудно записать ее уравнение в виде

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0. \tag{339}$$

Действительно, здесь коэфициенты при разностях $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ совпадают с координатами вектора (338), а это и значит, что плоскость (339) проведена через точку x, y, z перпендикулярно вектору (338).

Так же легко записать уравнение нормали, как прямой, проходящей через данную точку по направлению вектора (338):

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}}. \tag{340}$$

§ 36. Первая основная квадратичная форма.

Мы переходим к изучению поверхности в бесконечно малом вблизи какой-нибудь ее точки $M(u, v)$. В этом параграфе мы ограничимся точностью 1-го порядка, т. е. будем учитывать лишь бесконечно малые 1-го порядка.

Сместимся из точки $M(u, v)$ по какой-нибудь кривой на поверхности

$$u = u(t), \quad v = v(t)$$

в бесконечно близкую точку M' (черт. 78). Если приращение параметра t при этом будет dt, то дифференциалы криволинейных координат на поверхности (отличные, вообще говоря, от их приращений) будут

$$du = u'(t)\,dt, \quad dv = v'(t)\,dt.$$

В дальнейшем, много раз повторяя это построение, мы просто будем говорить *о дифференциалах* du, dv, *отвечающих данному бесконечно малому смещению по поверхности*. При этом читатель должен

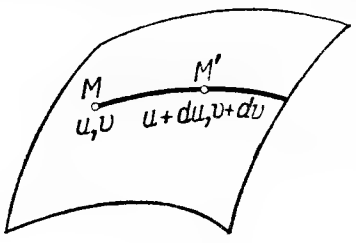
помнить только что разъясненный точный смысл этого выражения. Отношение этих дифференциалов $dv : du$ (если $du \neq 0$) имеет вполне определенное значение $v'(t) : u'(t)$ и характеризует, как мы знаем направление касательной к пути смещения.

Вычислим дифференциал радиуса-вектора $\mathbf{r}$ вдоль нашей кривой, отвечающий смещению из M в M'. По формуле (337)

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u\, du + \mathbf{r}_v\, dv. \tag{341}$$

Теперь нетрудно вычислить и дифференциал дуги ds кривой, отвечающей тому же смещению $\overset{\frown}{MM'}$. Действительно, по общей формуле

$$|ds| = |d\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_u\, du + \mathbf{r}_v\, dv| \tag{341'}$$



Черт. 78.

или

$$ds^2 = d\mathbf{r}^2 = (\mathbf{r}_u\, du + \mathbf{r}_v\, dv)^2.$$

Раскрывая скобки, вычисляем скалярный квадрат в правой части и получаем

$$ds^2 = \mathbf{r}_u^2\, du^2 + 2\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v\, du\, dv + \mathbf{r}_v^2\, dv^2.$$

Векторы $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$, а следовательно, и их скалярные произведения суть функции от u, v и зависят, следовательно, лишь от выбора точки $M(u, v)$. Введем для этих скалярных произведений сокращенные обозначения

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}_u\mathbf{r}_u &= E(u, v), \\ \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v &= F(u, v), \\ \mathbf{r}_v\mathbf{r}_v &= G(u, v). \end{aligned}\right\} \tag{342}$$

Тогда предыдущая формула может быть переписана в виде

$$ds^2 = E(u, v)\, du^2 + 2F(u, v)\, du\, dv + G(u, v)\, dv^2. \tag{343}$$

Выражение в правой части называется *первой основной квадратичной формой* на поверхности и играет в теории поверхностей огромную роль.

Как известно, вообще квадратичной формой называется целая рациональная функция (многочлен), однородная второй степени. Таким образом (343) является квадратичной формой по отношению к дифференциалам du, dv. Что же касается коэфициентов квадратичной формы E, F, G, то они от du, dv не зависят, а зависят лишь от выбора точки $M(u, v)$ на поверхности, по отношению к которой квадратичная форма составлена.

Значение первой квадратичной формы заключается в том, что она выражает квадрат дифференциала дуги ds при бесконечно малом смещении по поверхности. При этом коэфициенты квадратичной формы определяются той точкой $M(u, v)$, из которой производится смещение, а дифференциалы du, dv отвечают данному смещению из M.

Таким образом *первая квадратичная форма служит нам прежде всего для измерения в бесконечно малом длин вдоль поверхности.* Разумеется, мы выражаем посредством (343) лишь дифференциал ds, т. е. длину дуги смещения $\overset{\frown}{MM'}$ с ошибкой, бесконечно малой 2-го порядка.

Однако посредством интегрирования нетрудно перейти и к точному вычислению длин на поверхности. Пусть, действительно, первая квадратичная форма на поверхности нам известна, т. е. известен вид функциональной зависимости E, F, G от u, v. Возьмем отрезок какой-нибудь кривой на поверхности

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad T_0 \leqslant t \leqslant T.$$

Вдоль этой кривой дифференциал дуги будет выражаться, если воспользоваться формулой (343), таким образом:

$$ds = \sqrt{E(u, v)\,du^2 + 2F(u, v)\,du\,dv + G(u, v)\,dv^2}.$$

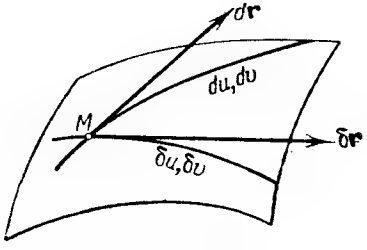
Так как u, v вдоль кривой суть функции от t, то и все подкоренное выражение в конечном итоге есть известная нам функция от t.

Интегрируя дифференциал ds в пределах от T_0 до T, получим точную длину соответствующего отрезка кривой от точки M_{T_0} до точки M_T:

$$\overset{\frown}{M_{T_0}M_T} = \int_{T_0}^{T} \sqrt{E(u,v)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F(u, v)\,\frac{du}{dt}\,\frac{dv}{dt} + G(u, v)\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt. \quad (344)$$

Подинтегральная функция от t нам известна, если на поверхности известна первая квадратичная форма и дана кривая.

Зная первую квадратичную форму на поверхности, можно измерять не только длины, но и углы между кривыми. Действительно, пусть из точки M выходят две кривые. Обозначим через du, dv дифференциалы криволинейных координат, отвечающие бесконечно малому смещению по одной кривой, и через δu, δv — то же самое для другой кривой.



Черт. 79.

Соответствующие дифференциалы радиуса-вектора мы обозначим через $d\mathbf{r}$ и $\delta\mathbf{r}$ (черт. 79). Согласно (341)

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u\,du + \mathbf{r}_v\,dv; \quad \delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_u\,\delta u + \mathbf{r}_v\,\delta v. \quad (345)$$

Как всегда, эти дифференциалы направлены по касательным к соответствующим кривым. Следовательно, угол между касательными (который мы и называем углом между кривыми) можно вычислять как угол между векторами (345). Как известно, косинус угла между векторами

равен их скалярному произведению, деленному на произведение длин:

$$\cos(\widehat{d\mathbf{r}, \delta\mathbf{r}}) = \frac{d\mathbf{r}\,\delta\mathbf{r}}{|d\mathbf{r}|\cdot|\delta\mathbf{r}|} = \frac{\mathbf{r}_u\mathbf{r}_u\,du\,\delta u + \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \mathbf{r}_v\mathbf{r}_v\,dv\,\delta v}{|ds|\cdot|\delta s|}.$$

В числителе мы вычисляем скалярное произведение $d\mathbf{r}\,\delta\mathbf{r}$, пользуясь формулами (345), а в знаменателях заменяем $|d\mathbf{r}|$ и $|\delta\mathbf{r}|$ соответствующими диференциалами дуг $|ds|$ и $|\delta s|$ на основании (341′).

Замечая, что скалярные произведения в числителе суть E, F, G. и заменяя ds и δs их выражениями согласно (343), получим окончательно

$$\cos(\widehat{d\mathbf{r}, \delta\mathbf{r}}) = \frac{E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\cdot\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}. \quad (346)$$

Так выражается косинус угла между двумя кривыми на поверхности через диференциалы координат u и v, отвечающие смещениям вдоль этих кривых из точки их пересечения. Заметим, что (346) вполне точная формула, так как правая часть зависит фактически лишь от отношений диференциалов $du : dv$ и $\delta u : \delta v$, а эти отношения имеют точные значения, зависящие лишь от направлений касательных к кривым в точке M. Числитель правой части называется по отношению к du, dv и δu, δv билинейной формой, полярной по отношению к квадратичной форме (343).

В частности, если мы ищем угол φ между координатными линиями в какой-нибудь точке $M(u, v)$, то можно считать

$$du \neq 0, \quad dv = 0 \quad \text{(смещение по линии } u\text{)},$$

$$\delta u = 0, \quad \delta v \neq 0 \quad \text{(смещение по линии } v\text{)}.$$

Формула (346) примет вид

$$\cos\varphi = \pm\frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Знак $\pm$ здесь указывает, что в качестве угла φ можно взять любой из смежных углов, образуемых координатными линиями. Если, в частности, коэфициент F равен нулю, то это равносильно обращению в нуль $\cos\varphi$ и означает, что угол φ прямой.

Наконец, *первая квадратичная форма позволяет вычислять на поверхности также и площади*. Прежде всего дадим определение понятия площади на поверхности.

Возьмем на поверхности какую-нибудь область D. Для определенности будем считать, что она ограничена кусочно гладкой кривой. Область D можно рассматривать одновременно как область изменения параметров u, v, именно как область, которая образована парами значений u, v, отвечающими точкам области D. Разобьем область D, проведя на поверхности некоторое конечное число координатных линий одного и другого семейств. Область D распадется на так называемые криволинейные параллелограмы, каждый из которых ограничен с двух сторон отрезками линий u, и с двух сторон — отрезками ли-

ний v. Один из таких параллелограмов в увеличенном масштабе дан на черт. 80 внизу. На куски этих параллелограммов, вырезаемые областью D около ее границы, мы не обращаем внимания, так как при последующем переходе к пределу в процессе бесконечного измельчения разбиения их роль сведется к нулю.

Рассмотрим один из параллелограммов. Пусть $M(u, v)$ будет его вершина с наименьшими значениями u, v и пусть другие вершины его будут $M_1(u+\Delta u, v)$, $M_2(u, v+\Delta v)$, $M'(u+\Delta u, v+\Delta v)$; MM_1 и M_2M' суть отрезки линий u, а MM_2 и M_1M' — отрезки линий v.

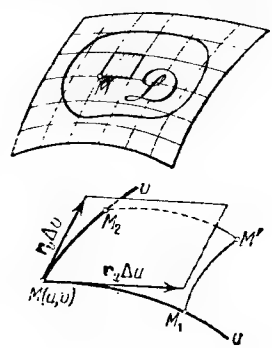
При переходе из M в M_1 по линии u v остается постоянным, а u получает приращение Δu, так что радиус-вектор $\mathbf{r}(u, v)$ получит приращение

$$\mathbf{r}(u+\Delta u, v) - \mathbf{r}(u, v) = \overline{MM_1}.$$

Заменим это приращение соответствующим дифференциалом радиуса-вектора $\mathbf{r}$, рассматривая $\mathbf{r}$ как функцию от u при закрепленном значении v.

Этот дифференциал будет равен, очевидно, $\mathbf{r}_u \Delta u$; смещением на этот вектор мы заменим криволинейный переход $\overset{\smile}{MM_1}$ (черт. 80). Совершенно аналогично заменяем криволинейное смещение $\overset{\smile}{MM_2}$ прямолинейным смещением на соответствующий частный дифференциал радиуса-вектора:

$$\mathbf{r}_v \Delta v.$$



Черт. 80.

В отличие от обычного, здесь Δu и Δv не бесконечно малые, но в дальнейшем при бесконечном измельчении разбиения Δu и Δv стремятся к нулю, так что ошибка, допущенная при замене приращения радиуса-вектора его дифференциалом, превратится в каждом из параллелограммов в бесконечно малую высшего порядка.

Заменим, наконец, криволинейный параллелограм прямолинейным параллелограммом, построенным на векторах $\mathbf{r}_u \Delta u$, $\mathbf{r}_v \Delta v$ и лежащим, следовательно, в касательной плоскости в точке $M(u, v)$. Этот параллелограм приближенно заменяет криволинейный и тем точнее, чем меньше размеры последнего.

Площадь прямолинейного параллелограма, построенного на данных векторах, равна модулю векторного произведения этих векторов, так что в нашем случае можно записать ее в виде

$$\Delta\sigma = |[\mathbf{r}_u \Delta u,\ \mathbf{r}_v \Delta v]| = |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|\,\Delta u\,\Delta v.$$

Весьма существенно, что эта площадь может быть выражена при помощи коэфициентов первой квадратичной формы. Действительно, для любых двух векторов — по самому определению векторного и скалярного произведений — имеют место равенства

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}), \quad \mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}),$$

отсюда ясно, что

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 + (\mathbf{ab})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2.$$

А так как квадрат модуля вектора равен скалярному квадрату самого вектора, то окончательно

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 + (\mathbf{ab})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2.$$

Применим эту формулу к векторам $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$:

$$|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|^2 + (\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v)^2 = \mathbf{r}_u^2\mathbf{r}_v^2$$

и воспользуемся обозначениями (342). Получим

$$|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|^2 = EG - F^2, \quad |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| = \sqrt{EG - F^2}. \tag{347}$$

Площадь $\Delta\sigma$ примет теперь вид

$$\Delta\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,\Delta u\,\Delta v, \tag{348}$$

где значения коэфициентов E, F, G взяты, очевидно, в точке $M(u, v)$. Таким образом, надстраивая над каждым криволинейным параллелограмом нашего разбиения соответствующий ему прямолинейный параллелограм, мы получаем площадь последнего $\Delta\sigma$ в виде произведения корня квадратного из дискриминанта первой квадратичной формы на приращения координат Δu, Δv, отвечающие сторонам криволинейного параллелограма.

Дискриминант первой квадратичной формы $EG - F^2$ есть функция u, v; в формуле (348) он взят в точке M, где прямолинейный параллелограм касается криволинейного.

Составим теперь сумму всех площадей

$$\sum \Delta\sigma = \sum \sqrt{EG - F^2}\,\Delta u\,\Delta v, \tag{349}$$

где суммирование распространено по всем параллелограмам данного разбиения, попавшим внутрь области D.

Будем теперь бесконечно измельчать разбиение, т. е. бесконечно увеличивать число начерченных координатных линий из того и другого семейства с таким расчетом, чтобы наибольшее значение Δu в данном разбиении стремилось к нулю, равно как и наибольшее значение Δv.

Предел, к которому стремится при этом сумма площадей (349), *называется площадью области D на поверхности.*

Для того чтобы это определение имело смысл, нужно показать, что этот предел существует и зависит только от выбора области D на поверхности (и не зависит, следовательно, от способа измельчения разбиения и от выбора криволинейных координат на поверхности).

Чтобы обнаружить это, нужно обратиться к теории кратных интегралов. Так как $\sqrt{EG - F^2}$ есть непрерывная функция от u, v, то указанный предел действительно существует, не зависит от способа измельчения разбиения и равен двойному интегралу от $\sqrt{EG - F^2}$

по D, как по области изменения переменных u, v. Обозначим этот предел через σ:

$$\sigma = \lim \sum_{D} \sqrt{EG - F^2}\,\Delta u\,\Delta v = \iint_{D} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv. \qquad (350)$$

Остается показать, что полученное выражение не зависит от выбора криволинейных координат на поверхности. Допустим, что мы перешли к новым криволинейным координатам U, V при помощи преобразования (331). Рассматривая $\mathbf{r}$ как функцию новых параметров U, V

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(U, V),$$

а U, V — как функции от u, v, мы можем продиференцировать $\mathbf{r}$ по u и по v как сложную функцию:

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{r}_U \frac{\partial U}{\partial u} + \mathbf{r}_V \frac{\partial V}{\partial u},$$

$$\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_U \frac{\partial U}{\partial v} + \mathbf{r}_V \frac{\partial V}{\partial v}.$$

Таким образом при другом выборе криволинейных координат u, v на поверхности, в каждой данной точке поверхности частные производные радиуса-вектора по u и v, $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$, меняют свои значения, хотя сам радиус-вектор $\mathbf{r}$ остается, конечно, без изменения. Поэтому коэфициенты E, F, G, вычисленные согласно (342), в тех же точках будут уже другими.

Составим векторное произведенне

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = \frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v}[\mathbf{r}_U, \mathbf{r}_V] + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial v}[\mathbf{r}_V, \mathbf{r}_U] =$$

$$= \left(\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial v}\right)[\mathbf{r}_U, \mathbf{r}_V] = \frac{\partial (U, V)}{\partial (u, v)}[\mathbf{r}_U, \mathbf{r}_V].$$

Беря правую и левую части равенства по модулю и вспоминая равенство (347), получим

$$\sqrt{EG - F^2} = \left|\frac{\partial (U, V)}{\partial (u, v)}\right| \sqrt{\widetilde{E}\widetilde{G} - \widetilde{F}^2}, \qquad (351)$$

где $\widetilde{E}$, $\widetilde{G}$, $\widetilde{F}$ означают коэфициенты первой квадратичной формы в новых криволинейных координатах U, V. Формула (351) интересна тем, что она выражает закон преобразования дискриминанта первой квадратичной формы при переходе от новых координат к старым. Мы видим, что корень квадратный из дискриминанта умножается на модуль якобиана от новых координат по старым.

Подставляя полученное выражение (351) в интеграл (350), получим

$$\iint_{D} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = \iint_{D} \sqrt{\widetilde{E}\widetilde{G} - \widetilde{F}^2}\left|\frac{\partial (U, V)}{\partial (u, v)}\right| du\,dv.$$

Пользуясь формулой преобразования переменных под знаком кратного интеграла (Гурса, т. I, § 118), мы можем переписать правую часть в новом виде, переходя к переменным U, V:

$$\iint\limits_D \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv = \iint\limits_{\widetilde{D}} \sqrt{\widetilde{E}\widetilde{G}-\widetilde{F}^2}\,dU\,dV. \qquad (352)$$

Интегрирование в правой части производится по области изменения переменных U, V, которую мы обозначаем $\widetilde{D}$ и которая соответствует прежнему куску поверхности, тому же, что и область D в переменных u, v. Формула (352) показывает, что результат вычисления площади данного куска поверхности будет один и тот же в любой системе криволинейных координат на поверхности. Наше определение площади является, следовательно, законным, и мы можем вычислять площадь области на поверхности по формуле (350).

Подведем итоги. Пусть в некоторой системе криволинейных координат u, v на поверхности нам задана первая квадратичная форма

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

другими словами, пусть E, F, G заданы как функции u, v. Тогда, хотя бы мы ничего больше о поверхности не знали (не знали бы ее формы в пространстве, не имели бы ее уравнения и т. д.), мы можем вычислять *длины* кривых на поверхности, *углы* между ними и *площади* областей на поверхности — по формулам (344), (346) и (350). В главе VII будет подробно развита эта точка зрения на поверхность. Те геометрические свойства поверхности, которые можно установить, исходя из задания только первой квадратичной формы, образуют так называемую *внутреннюю геометрию поверхности*.

В заключение одно замечание из области алгебры. Первая квадратичная форма (343) — по самому своему определению она выражает ds^2, или, что то же, $d\mathbf{r}^2$ — есть форма *положительная* при всех значениях du, dv, кроме, разумеется, $du = dv = 0$. Отсюда вытекает, как можно показать чисто алгебраическим путем, что ее дискриминант также положителен:

$$EG - F^2 > 0. \qquad (353)$$

Мы уже убедились в этом из геометрических соображений — формула (347) показывает, что дискриминант равен скалярному квадрату вектора $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$.

Далее, так как (346) выражает косинус, то дробь в правой части по модулю $\leqslant 1$, и следовательно, числитель по модулю всегда не превосходит знаменателя. Это неравенство, имеющее место при любых du, dv и δu, δv, также можно алгебраически вывести из положительности квадратичной формы.

Заметим еще, что если диференциал дуги ds вычисляется вдоль линии u, то $dv = 0$, и формула (343) принимает вид

$$ds^2 = E\,du^2.$$

Отсюда видно, что

$$E > 0 \quad \text{и} \quad ds = \sqrt{E}\,du. \tag{354}$$

Вычисляя аналогично дифференциал дуги ds вдоль линии v, убеждаемся, что

$$G > 0 \quad \text{и} \quad ds = \sqrt{G}\,dv. \tag{354'}$$

Пример.

Поверхность вращения. Рассмотрим поверхность, образованную вращением около оси Z какой-нибудь кривой C, расположенной в плоскости XZ. Пусть параметрическое представление кривой C будет

$$x = \psi(u) > 0, \quad z = \varphi(u)$$

(условие $\psi(u) > 0$ устраняет пересечение кривой с осью вращения). Чтобы характеризовать положение какой-нибудь точки M на поверхности, мы будем указывать значение параметра u, т. е. положение точки на исходной кривой C, и угол v, на который кривая C повернулась около оси Z (сделать чертеж). Очевидно, меняя u, мы пробегаем кривую C, а меняя v, мы заставляем C описывать нашу поверхность вращения.

Координаты x, y, z точки M выразятся через u, v:

$$x = \psi(u)\cos v, \quad y = \psi(u)\sin v, \quad z = \varphi(u).$$

Радиус-вектор примет вид

$$\mathbf{r}(u, v) = \psi(u)\,\mathbf{e}(v) + \varphi(u)\,\mathbf{k}, \quad \text{где} \quad \mathbf{e}(v) = \mathbf{i}\cos v + \mathbf{j}\sin v.$$

Легко проверить, что при указанном выборе криволинейных координат u, v на поверхности вращения координатные линии u представляют собой *меридианы*, а линии v — *параллели*.

Составим первую квадратичную форму. Вычисляем:

$$\mathbf{r}_u = \psi'(u)\,\mathbf{e}(v) + \varphi'(u)\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_v = \psi(u)\,\mathbf{e}\left(v + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$E = \psi'^2 + \varphi'^2, \quad F = 0, \quad G = \psi^2.$$

Отсюда

$$ds^2 = (\psi'^2 + \varphi'^2)\,du^2 + \psi^2 dv^2.$$

Мы замечаем, что коэфициенты E, F, G зависят лишь от одной координаты u; при этом $F = 0$, что и следовало ожидать, так как меридианы и параллели (т. е. наши координатные линии) ортогональны.

§ 37. Вторая основная квадратичная форма и кривизна линий на поверхности.

Продолжаем изучение поверхности вблизи какой-нибудь ее точки M. Пусть MM' (черт. 81) — одна из кривых на поверхности, проходящих через M. Предположим для простоты, что вдоль этой кривой за параметр принята длина дуги s, так что текущие координаты u, v выражаются как функции s:

$$u = u(s), \quad v = v(s)$$

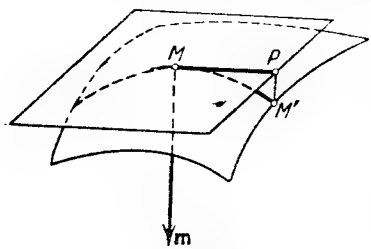
и, следовательно,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\{u(s), v(s)\}. \tag{355}$$

Пусть длина дуги $\overset{\frown}{MM'}$ равна Δs, т. е. Δs есть приращение параметра s при смещении по кривой из M в M' (считая, что s растет в этом направлении). Соответствующее приращение $\Delta\mathbf{r}$ радиуса-вектора $\mathbf{r}$ равно, очевидно, $\overline{MM'}$, так что, разлагая это приращение в ряд Тэйлора, можно записать

$$\overline{MM'} = \Delta\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}\,\Delta s + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{r}}(\Delta s)^2 + \ldots. \tag{356}$$

где $\dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}}$, ... взяты в точке M. Пусть теперь Δs стремится к нулю, т. е. смещение $\overset{\frown}{MM'}$ берется бесконечно малым. Если вести исследование с точностью 1-го порядка, т. е. учитывать лишь бесконечно малые 1-го порядка, то в правой части достаточно принять во внимание лишь первое слагаемое $\dot{\mathbf{r}}\Delta s$, совпадающее с дифференциалом $d\mathbf{r}$. В таком случае смещение $\overline{MM'}$ можно считать направленным по касательной к кривой в точке M и, следовательно, лежащим в плоскости, касательной к поверхности в M. В сущности мы именно так и поступали в предыдущем параграфе, так как у нас играли роль лишь дифференциалы радиуса-вектора при смещении из данной точки по поверхности.



Черт. 81.

В этом параграфе мы переходим к более глубокому изучению поверхности в бесконечно малом, учитывая при смещении по кривой MM' бесконечно малые не только 1-го, но и 2-го порядка. Это скажется между прочим в том, что в рассмотрение войдут кривизна и соприкасающаяся плоскость кривой смещения $\overset{\frown}{MM'}$, которые раньше не играли у нас никакой роли. Кроме того, теперь смещение $\overset{\frown}{MM'}$ нельзя уже считать расположенным в касательной плоскости. Мы начнем именно с оценки уклонения от касательной плоскости при смещении из точки касания M в бесконечно близкую точку M' по какой-нибудь кривой на поверхности (черт. 81).

Пусть P будет основание перпендикуляра, опущенного из M' на касательную плоскость. Построим в точке M единичный вектор $\mathbf{m}$, направленный по нормали к поверхности (в произвольно выбранную сторону). Очевидно, что тогда вектор $\overline{PM'}$ параллелен $\mathbf{m}$, так что можно записать

$$\overline{PM'} = l\mathbf{m},$$

где l — численный коэфициент, положительный, если уклонение $\overline{PM'}$ от касательной плоскости направлено в сторону $\mathbf{m}$, и отрицательный — если оно направлено в обратную сторону. Кроме того, так как $\mathbf{m}$ — вектор единичный, то l по модулю равен как раз уклонению PM'. Мы будем коротко называть l уклонением и постараемся его вычислить.

Так как, очевидно,

$$\overline{MM'} = \overline{MP} + \overline{PM'} = \overline{MP} + l\mathbf{m},$$

то равенство (356) можно переписать в виде

$$\overline{MP} + l\mathbf{m} = \dot{\mathbf{r}}\,\Delta s + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{r}}(\Delta s)^2 + \dots$$

Теперь нетрудно вычислить l, умножая скалярно обе части равенства на $\mathbf{m}$. Так как $\mathbf{m}$ перпендикулярен к касательной плоскости с лежащими в ней векторами $\overline{MP}$ и $\dot{\mathbf{r}}\,\Delta s$, то первые слагаемые в левой и в правой частях обратятся в нуль. Кроме того, вектор $\mathbf{m}$ единичный, так что $\mathbf{m}^2 = 1$. В итоге получим

$$l = \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{r}}\mathbf{m}(\Delta s)^2 + \dots \tag{357}$$

Мы вычислили уклонение l от касательной плоскости при смещении из точки касания M; оно будет бесконечно малым 2-го порядка. Главная часть его выписана, точками же обозначены бесконечно малые более высокого порядка. Главной частью уклонения l мы сейчас и займемся.

Скалярное произведение $\ddot{\mathbf{r}}\mathbf{m}$ можно представить в двух видах. Во-первых, диференцируя формулу (355) по s, получим

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_u\dot{u} + \mathbf{r}_v\dot{v}.$$

Диференцируем еще раз, рассматривая $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ как функции от $u(s)$, $v(s)$. Получим

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_{uu}\dot{u}^2 + \mathbf{r}_{uv}\dot{u}\,\dot{v} + \mathbf{r}_u\ddot{u} + \mathbf{r}_{vu}\dot{v}\,\dot{u} + \mathbf{r}_{vv}\dot{v}^2 + \mathbf{r}_v\ddot{v}.$$

Умножая скалярно на $\mathbf{m}$ и учитывая, что $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ лежат в касательной плоскости и, следовательно, перпендикулярны к $\mathbf{m}$, получим

$$\ddot{\mathbf{r}}\mathbf{m} = \mathbf{r}_{uu}\mathbf{m}\,\dot{u}^2 + 2\mathbf{r}_{uv}\mathbf{m}\,\dot{u}\,\dot{v} + \mathbf{r}_{vv}\mathbf{m}\,\dot{v}^2. \tag{358}$$

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}_{uu}\mathbf{m} &= L(u, v), \\ \mathbf{r}_{uv}\mathbf{m} &= M(u, v), \\ \mathbf{r}_{vv}\mathbf{m} &= N(u, v). \end{aligned}\right\} \tag{359}$$

Значения L, M, N зависят от выбора точки (u, v) на поверхности, касательная плоскость в которой сейчас рассматривается. Так как направление $\mathbf{m}$ может быть изменено на обратное, то L, M, N являются не вполне определенными в том смысле, что знаки у них можно изменить одновременно на обратные. Обычно мы будем предполагать, что вектор $\mathbf{m}$ выбран в каждой точке поверхности по формуле

$$\mathbf{m} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{360}$$

Действительно, вектор в числителе направлен по нормали к поверхности, а так как в знаменателе стоит его модуль [см. (347)], то получается единичный вектор по нормали. При данном выборе криволинейных координат u, v вектор $\mathbf{m}$, а следовательно, и L, M, N будут являться вполне определенными функциями от u, v.

Вставляя выражение (360) для $\mathbf{m}$ в формулы (359), мы получим выражения для L, M, N в виде

$$\left.\begin{aligned} L(u, v) &= \frac{\mathbf{r}_{uu}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}, \\ M(u, v) &= \frac{\mathbf{r}_{uv}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}, \\ N(u, v) &= \frac{\mathbf{r}_{vv}\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{361}$$

В числителях здесь стоят смешанные произведения соответствующих векторов.

Переписывая теперь (358) в сокращенных обозначениях

$$\ddot{\mathbf{r}}\mathbf{m} = L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2$$

и умножая обе части на $\frac{1}{2}(\Delta s)^2$, получим

$$\frac{1}{2}\ddot{\mathbf{r}}\mathbf{m}(\Delta s)^2 = \frac{1}{2}(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2), \tag{362}$$

так как $\dot{u}\Delta s = du$, $\dot{v}\Delta s = dv$.

Таково первое выражение для главной части уклонения l. Мы видим, что оно представляет собой половину значения квадратичной формы

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2.$$

Это — квадратичная форма относительно du, dv с коэфициентами, зависящими от выбора точки (u, v) на поверхности. Она называется *второй основной квадратичной формой на поверхности*. Половина ее величины выражает нам главную часть расстояния от точки поверхности M' до касательной плоскости в бесконечно близкой к ней точке M, если координаты точки M суть u, v, а смещению из M в M' отвечают диференциалы координат du, dv.

Воспользуемся теперь другим видом записи скалярного произведения $\ddot{\mathbf{r}}\mathbf{m}$. Для этого вспомним, что вдоль всякой кривой $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{t}$ и, следовательно, по первой формуле Френе

$$\ddot{\mathbf{r}} = k\mathbf{n},$$

где k — кривизна, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор по главной нормали. Применяя эту формулу к кривой смещения MM' в точке M, мы можем написать

$$\ddot{\mathbf{r}}\mathbf{m} = k\mathbf{n}\mathbf{m}$$

или

$$\ddot{\mathbf{r}}\mathbf{m} = k\cos\theta, \tag{363}$$

где θ — угол между единичными векторами $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$, т. е. угол между положительными направлениями главной нормали к кривой MM' и нормали к поверхности в точке M (черт. 82).

Так как вдоль кривой MM' за параметр принята длина дуги s, то для s, как для аргумента, дифференциал совпадает с приращением:

$$\Delta s = ds,$$

и следовательно, формулу (343) можно переписать в нашем случае в виде

$$(\Delta s)^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Перемножая это равенство почленно с равенством (363) и умножая на $\frac{1}{2}$, приходим ко второму выражению для главной части уклонения:

$$\frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{r}}\mathbf{m})(\Delta s)^2 = \frac{1}{2}k\cos\theta\,(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2). \qquad (364)$$

Главное назначение этого второго выражения заключается в том, что, сопоставляя его с первым, мы получаем исключительной важности формулу, которая ляжет в основу теории, излагаемой в последующих параграфах.

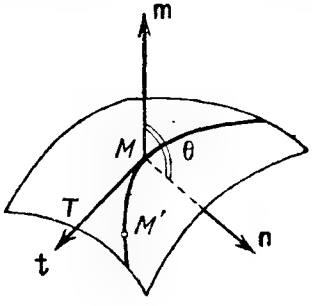
Именно, приравнивая правые части равенств (364) и (362) и отбрасывая $\frac{1}{2}$, получим

$$k\cos\theta\,(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2) = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2,$$

откуда

$$k\cos\theta = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}. \qquad (365)$$

Это и есть *основная формула*, геометрический смысл которой мы должны уяснить себе. Если точка M на поверхности задана, то коэфициенты E, F, G, L, M, N имеют вполне определенные значения, так что их можно считать постоянными. В таком случае правая часть формулы зависит только от отношения дифференциалов $dv : du$, в чем легко убедиться, деля числитель и знаменатель на du^2 или на dv^2. Но отношение $dv : du$ характеризуется направлением касательной к кривой смещения MM' в точке M (см. § 35). Поэтому правая часть (365) зависит только от направления касательной MT к кривой MM' и имеет одно и то же значение для всех кривых MM' на поверхности, имеющих в данной точке M общую касательную.



Черт. 82.

Пусть касательная MT к кривой MM' задана; тогда правая часть (365) вполне определится, — следовательно, определится и знак у $\cos\theta$, так как k всегда больше нуля.

Соприкасающаяся плоскость к кривой MM' в точке M остается еще при этом неопределенной; точнее, разные кривые MM' с общей касательной MT в точке M могут обладать различными соприкасающимися плоскостями, образующими пучок плоскостей, проходящих через MT.

Если соприкасающаяся плоскость к MM' в точке M также указана, то в ней определится и главная нормаль как перпендикуляр к MT в точке M. Следовательно, определится и угол θ между главной нормалью в положительном направлении $\mathbf{n}$ и нормалью к поверхности $\mathbf{m}$. Правда, так как положительное направление на главной нормали еще не определено, то для угла θ представляются две возможности: острый или смежный к нему тупой угол. Но так как знак $\cos\theta$ уже определен, то из этих возможностей остается лишь одна определенная. Итак, угол θ вполне определен. Но в формулу (365) входит еще кривизна k, которая, как мы видим, теперь определится однозначно, после деления на $\cos\theta$ (считая $\theta \neq \frac{\pi}{2}$) обеих частей формулы.

Итак, *задание касательной MT и соприкасающейся плоскости кривой MM' в точке M вполне определяют ее кривизну k.* Отсюда все кривые на поверхности, имеющие в данной точке общую касательную и общую соприкасающуюся плоскость (при $\theta \neq \frac{\pi}{2}$), имеют в этой точке и общую кривизну.

Итак, *роль формулы* (365) *заключается в том, что для всевозможных кривых, проведенных по поверхности через данную точку M, устанавливается определенная зависимость между направлением касательной, положением соприкасающейся плоскости и кривизной в точке M.* Тем самым ею характеризуется в существенной степени и поведение поверхности в бесконечно малом около точки M (с точностью 2-го порядка).

Мы устранили случай, когда угол θ прямой и соприкасающаяся плоскость к кривой MM' совпадает в точке M с касательной плоскостью к поверхности. Так как обращение в нуль $\cos\theta$ влечет обращение в нуль и правой части (365), то это возможно при смещении из M самое большее лишь по двум направлениям, для которых du, dv удовлетворяют условию

$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0. \tag{366}$$

Такие направления называются *асимптотическими* и будут изучены позже.

§ 38. Теорема Менье.

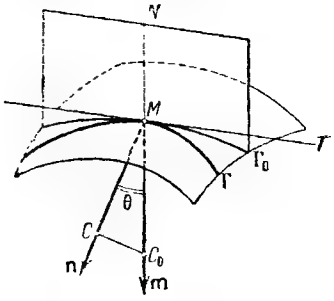
Мы видели, что формула (365) устанавливает зависимость кривизны кривой на поверхности от положения касательной и соприкасающейся плоскости к этой кривой в данной точке. Изучим прежде всего зависимость кривизны от соприкасающейся плоскости при заданной касательной.

Итак, в данной точке M на поверхности рассматриваются всевозможные проходящие через нее по поверхности кривые с общей касательной MT, заданной, разумеется, в касательной плоскости к поверхности.

Пусть Γ — одна какая-нибудь из этих кривых, $\mathbf{n}$ — ее единичный вектор по главной нормали, C — центр кривизны (черт. 83).

Среди всевозможных кривых с касательной MT можно выбрать одну, наиболее непосредственно связанную с самой поверхностью.

Мы будем называть *нормальным сечением* поверхности в точке M кривую пересечения поверхности с нормальной плоскостью в точке M, т. е. с плоскостью, проведенной через нормаль в точке M. Таких плоскостей в каждой точке M бесчисленное множество, соответственно чему мы получаем и бесчисленное множество нормальных сечений.



Черт. 83.

Но всегда можно построить нормальное сечение с заданной касательной MT. Действительно, проведем нормальную плоскость TMN через MT и нормаль к поверхности MN и возьмем ее пересечение с поверхностью. Получим нормальное сечение Γ_0; его касательная должна лежать, во-первых, в его плоскости TMN (Γ_0 — плоская кривая) и, во-вторых, в касательной плоскости к поверхности, как и для всякой кривой, проведенной на поверхности. Но TM есть как раз прямая, лежащая в обеих этих плоскостях и совпадающая, таким образом, с касательной к Γ_0.

Итак, нормальное сечение Γ_0 с заданной касательной MT всегда можно построить и, очевидно, единственным образом.

Так как соприкасающаяся плоскость плоской кривой Γ_0 совпадает просто с ее плоскостью TMN, то главной нормалью к Γ_0 будет служить перпендикуляр к MT в плоскости MTN, т. е. нормаль к поверхности, MN. Обозначим через C_0 центр кривизны кривой Γ_0, лежащий, таким образом, на нормали MN. Единичный вектор $\mathbf{m}$ по нормали MN направим для удобства в сторону C_0, т. е. в положительную сторону главной нормали Γ_0, так что

$$\mathbf{m} = \mathbf{n}_0,$$

где $\mathbf{n}_0$ — единичный вектор по главной нормали кривой Γ_0.

Применим теперь формулу (365), во-первых, к кривой Γ, во-вторых, к Γ_0, нормальному сечению с той же касательной MT; получим

$$k\cos\theta = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} \tag{367}$$

и

$$k_0 = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Здесь через k_0 обозначена кривизна рассматриваемого нормального сечения в точке M. Множитель $\cos\theta$ исчез во второй формуле потому, что для кривой Γ_0 угол θ между $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}_0$ равен нулю, и значит косинус его равен единице.

(Заметим, что, говоря о центре кривизны C_0 нормального сечения Γ_0, мы предполагаем, что он не удаляется в бесконечность, т. е. что кривизна k_0 не обращается в нуль. Вторая из формул (367) показывает, что это допущение равносильно необращению в нуль числителя в правой части, и означает, следовательно, что направление MT не является асимптотическим [см. (366)]. Итак, случай асимптотического направления MT оставлен нами в стороне.)

Мы замечаем, что правые части формул (367) равны между собой. Действительно, коэфициенты E, F, G, L, M, N одинаковы, потому что относятся к одной и той же точке M, а отношения $dv:du$ одинаковы в обоих случаях потому, что характеризуют направление касательной MT, общей для Γ и Γ_0.

Приравнивая левые части, получаем

$$k\cos\theta = k_0,$$

откуда

$$R = R_0\cos\theta, \tag{368}$$

где R и R_0 суть радиусы кривизны соответственно Γ и Γ_0,

$$R = \frac{1}{k}, \quad R_0 = \frac{1}{k_0}.$$

Очевидно, что, так как нормали $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ обе перпендикулярны касательной MT, то θ, равный $\widehat{\mathbf{mn}}$, измеряет двугранный угол между плоскостями TMN и TMC.

Итак, *радиус кривизны произвольной кривой* Γ *на поверхности равен в данной точке радиусу кривизны нормального сечения* Γ_0, *взятого в той же точке и с той же касательной, умноженному на косинус угла* θ *между соприкасающейся плоскостью к* Γ *и плоскостью нормального сечения* Γ_0. В этом и заключается в сущности теорема Менье. Но ей можно придать очень наглядную геометрическую формулировку, к которой мы сейчас и переходим.

Заметим прежде всего, что так как R и R_0 — величины заведомо положительные, то $\cos\theta$ также положителен, как следует из (368). Следовательно, угол θ между положительными направлениями главных нормалей к кривым Γ и Γ_0, другими словами, между отрезками MC и MC_0, будет острым (черт. 83). Построим треугольник MCC_0. Так как C и C_0 суть соответственно центры кривизны, то

$$MC = R, \quad MC_0 = R_0.$$

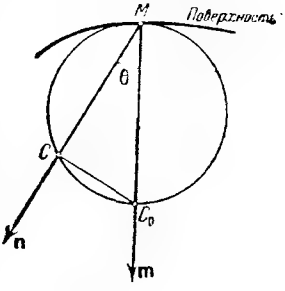
Формулу (368) можно переписать, следовательно, в виде

$$MC = MC_0\cdot\cos\theta.$$

Из этого соотношения следует, что треугольник MCC_0 прямоугольный с прямым углом $\widehat{MCC_0}$. Следовательно, C есть основание перпендикуляра, опущенного из C_0 на главную нормаль кривой Γ. Итак,

$$C_0C \perp MC.$$

Кроме того, касательная MT перпендикулярна обеим нормалям MC и MC_0 и, следовательно, перпендикулярна любой прямой в их плоскости, в частности, прямой C_0C. Отсюда вытекает, что C_0C перпендикулярна плоскости прямых MC и MT, т. е. соприкасающейся плоскости кривой Γ.



Черт. 84.

Теорему Менье можно теперь формулировать так: *центр кривизны C для данной точки M кривой Γ на поверхности можно получить как основание перпендикуляра, опущенного на соприкасающуюся плоскость кривой Γ из центра кривизны нормального сечения Γ_0, взятого в той же точке M и имеющего общую касательную с Γ.*

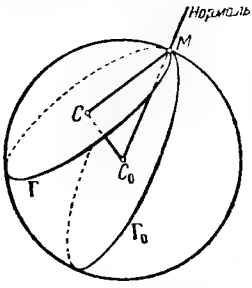
Чтобы нагляднее представить себе положение вещей, возьмем сечение черт. 83 плоскостью CMC_0, перпендикулярной к касательной MT (черт. 84).

Если представить себе, что соприкасающаяся плоскость TMC вращается около неизменной касательной MT, удаляясь от соответствующей нормальной плоскости TMN, то вектор $\mathbf{n}$ поворачивается в плоскости черт. 84, а так как угол $\widehat{MCC_0}$ остается прямым, то центр кривизны C описывает окружность, построенную на MC_0 как на диаметре. Когда угол θ стремится к $\frac{\pi}{2}$ и, следовательно, соприкасающаяся плоскость TMC стремится совпасть с касательной плоскостью к поверхности, радиус кривизны MC стремится к нулю, и кривизна бесконечно возрастает (напоминаем, что случай асимптотического направления MT исключен из рассмотрения).

Интересно отметить частный случай, когда кривая Γ есть сечение поверхности некоторой плоскостью, но уже не обязательно нормальной. Тогда эта плоскость, содержа в себе Γ, служит для Γ и соприкасающейся плоскостью. В этом случае черт. 83 нужно представлять себе так, что кривая Γ лежит в своей соприкасающейся плоскости TMC и получена ее пересечением с поверхностью. Вращая плоскость TMC около неизменной касательной MT и беря в качестве кривых Γ сечения поверхности этой плоскостью, мы наблюдаем изменение радиуса кривизны R и положения центра кривизны C сечения Γ по тому же в точности закону, что и в общем случае.

Примеры. 1. Если рассматривается поверхность сферы, то теорема Менье в применении к плоским сечениям приобретает элементарный характер. Действительно, касательная плоскость к сфере всегда перпендикулярна радиусу,

проведенному в точку касания и, следовательно, этот радиус служит нормалью. Таким образом все нормали к сфере проходят через ее центр, а следовательно, и всякая нормальная плоскость во всякой точке сферической поверхности проходит через центр. Отсюда следует, что все нормальные сечения Γ_0 суть окружности больших кругов сферы, и центр кривизны C_0 любого нормального сечения Γ_0 совпадает с центром сферы. Если взять, с другой стороны, в качестве кривой Γ любое плоское сечение сферической поверхности, то получается окружность и, следовательно, центр кривизны C кривой Γ есть центр этой окружности (черт. 85). Если теперь из центра кривизны C_0, т. е. из центра сферы, опустить перпендикуляр на плоскость окружности Γ, то мы попадаем, в силу элементарной теоремы, в центр окружности Γ, или, что то же, в ее центр кривизны C.



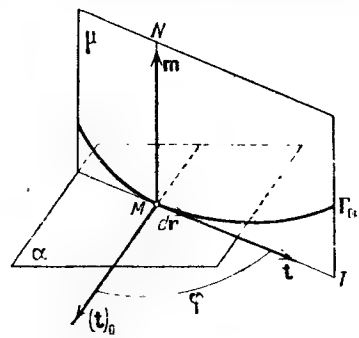
Черт. 85.

2. Рассмотрим нормальное сечение поверхности вращения (черт. 113) в точке M, имеющее касательную, общую с параллелью (т. е. плоскость сечения проходит через нормаль MQ перпендикулярно плоскости чертежа). По теореме Менье центр кривизны нормального сечения должен проектироваться в центр кривизны наклонного сечения с той же касательной, в частности в центр P окружности (параллели). Отсюда вытекает, что центр кривизны нормального сечения должен лежать на оси вращения и, следовательно, совпадать с точкой Q (точкой пересечения нормали и оси вращения).

§ 39. Главные сечения и главные кривизны.

Теорема Менье позволяет очень наглядным путем находить центр и радиус кривизны произвольной кривой на поверхности, если известен радиус кривизны нормального сечения в той же точке и с той же касательной.

Теперь нам нужно изучить, как меняется радиус кривизны нормального сечения поверхности в зависимости от направления его касательной в данной точке. В результате мы получим довольно полную картину поведения поверхности в бесконечно малом около данной точки.



Черт. 86.

Пусть M — данная точка поверхности, $\mathbf{m}$ — единичный вектор нормали к поверхности в ней, α — касательная плоскость (черт. 86). Будем проводить через $\mathbf{m}$ всевозможные плоскости μ; это будут нормальные плоскости к поверхности, и каждая из них определяет некоторое нормальное сечение Γ_0. Пересечение MT нормальной плоскости μ с касательной плоскостью α служит, как мы знаем из предыдущего параграфа, касательной к соответствующему нормальному сечению Γ_0 в точке M.

Выбор нормального сечения мы будем определять заданием единичного касательного к нему вектора $\mathbf{t}$, по направлению которого

проводится касательная MT, после чего плоскость NMT высекает соответствующее нормальное сечение. Вращая вектор $\mathbf{t}$ в касательной плоскости α, мы обежим все нормальные сечения, причем после поворота на 180° мы возвратимся к исходному нормальному сечению.

Вектор $\mathbf{t}$, отвечающий данному нормальному сечению, определяется, как и обычно, формулой

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds},$$

где дифференциалы взяты при смещении из точки M по нормальному сечению. Но по основной формуле (337) $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$ и, следовательно, $\mathbf{t} = \mathbf{r}_u \frac{du}{ds} + \mathbf{r}_v \frac{dv}{ds}$.

Обозначим для краткости

$$\xi = \frac{du}{ds}, \quad \eta = \frac{dv}{ds}; \tag{369}$$

тогда

$$\mathbf{t} = \xi \mathbf{r}_u + \eta \mathbf{r}_v. \tag{370}$$

Итак, для каждого нормального сечения имеется свой вектор $\mathbf{t}$ со своими коэфициентами ξ, η в его разложении по $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ в точке M.

Обратно, пара значений ξ, η однозначно определяет вектор $\mathbf{t}$ и, следовательно, выбор нормального сечения. Однако величины ξ, η нельзя выбирать совершенно произвольно. Касательный вектор $\mathbf{t}$, определяемый согласно (370), должен быть единичным и, следовательно,

$$\mathbf{t}^2 = (\xi \mathbf{r}_u + \eta \mathbf{r}_v)^2 = 1.$$

Раскрывая скобки в скалярном квадрате и вспоминая обозначения коэфициентов первой квадратичной формы (342), получим

$$E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2 = 1. \tag{371}$$

Таково условие, связывающее переменные ξ, η.

Выпишем для какого-нибудь из нормальных сечений основную формулу (365)

$$k \cos \theta = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}. \tag{372}$$

Но для нормального сечения, как легко показать (см. предыдущий параграф), главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности, поэтому вектор $\mathbf{n}$ либо совпадает с единичной нормалью $\mathbf{m}$ к поверхности, либо отличается от нее знаком.

Итак, или

$$\mathbf{n} = \mathbf{m}, \qquad \widehat{\mathbf{nm}} = \theta = 0, \quad k \cos \theta = k,$$

или

$$\mathbf{n} = -\mathbf{m}, \quad \widehat{\mathbf{nm}} = \theta = \pi, \quad k \cos \theta = -k.$$

Так как плоская кривая уклоняется от своей касательной всегда в сторону вектора $\mathbf{n}$ (в положительную сторону главной нормали), то в первом случае нормальное сечение расположено в сторону $\mathbf{m}$ от своей касательной, во втором же случае в сторону $-\mathbf{m}$.

Введем для удобства обозначение

$$\widetilde{k} = \begin{cases} k & \text{в первом случае,} \\ -k & \text{во втором случае.} \end{cases}$$

Таким образом $\widetilde{k}$ *есть кривизна нормального сечения* k, *взятая со знаком плюс в первом случае, т. е. когда нормальное сечение уклоняется от своей касательной в сторону* $\mathbf{m}$, *и со знаком минус во втором случае, т. е. когда уклонение будет в обратную сторону.* Итак, модуль $\widetilde{k}$ указывает нам кривизну k нормального сечения в точке M, а знак $\widetilde{k}$ — в какую сторону это нормальное сечение уклоняется от касательной плоскости (на черт. 86 знак $\widetilde{k}$ для Γ_0 будет положительным, так как Γ_0 уклоняется от плоскости α в сторону $\mathbf{m}$).

Таким образом величина $\widetilde{k}$ очень удобна для характеристики поведения нормального сечения в точке M, и ею мы и будем заниматься. Очевидно формулу (372) можно переписать теперь в виде

$$\widetilde{k} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}. \qquad (372')$$

Так как здесь под du, dv подразумеваются диференциалы координат u, v при смещении из точки M по рассматриваемому нормальному сечению, то знаменатель представляет собой ds^2, где ds — соответствующий диференциал дуги.

Пользуясь обозначениями (369):

$$\frac{du}{ds} = \xi,$$

$$\frac{dv}{ds} = \eta,$$

получим

$$\widetilde{k} = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2. \qquad (373)$$

Итак, кривизна нормального сечения $\widetilde{k}$ выражается как функция переменных ξ, η, что естественно, так как эти переменные, как мы знаем, однозначно определяют выбор нормального сечения. При этом переменные ξ, η не являются независимыми между собой, а связаны соотношением (371).

Чтобы уяснить себе положение вещей наиболее наглядным образом, представим себе, что мы вращаем вектор $\mathbf{t}$ в плоскости α, начиная от некоторого начального положения $(\mathbf{t})_0$. Тогда вектор $\mathbf{t}$, а следова-

тельно, и коэфициенты его разложения, будут непрерывными и дифференцируемыми функциями угла поворота φ:

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}(\varphi), \quad \xi = \xi(\varphi), \quad \eta = \eta(\varphi).$$

При этом угол φ мы будем менять в пределах

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,$$

так как при $\varphi = \pi$ мы получаем $\mathfrak{t} = -(\mathfrak{t})_0$ и возвращаемся к прежнему нормальному сечению.

В таком случае $\widetilde{k}$, выражаемое формулой (373), будет также непрерывной и дифференцируемой функцией от φ. Займемся отысканием экстремумов этой функции. Для этой цели используем необходимое условие экстремума, именно, обращение в нуль производной от $\widetilde{k}$ по φ или, как нам будет удобнее записать, дифференциала $\widetilde{k}(\varphi)$. Дифференцируем формулу (373), считая ξ, η функциями от φ, а L, M, N постоянными:

$$d\widetilde{k} = 2L\xi\, d\xi + 2M\eta\, d\xi + 2M\xi\, d\eta + 2N\eta\, d\eta.$$

Приравнивая $d\widetilde{k}$ нулю, получим

$$(L\xi + M\eta)\, d\xi + (M\xi + N\eta)\, d\eta = 0. \tag{374}$$

Учтем теперь, что функции $\xi(\varphi)$, $\eta(\varphi)$ все время связаны соотношением (371). Дифференцируя это соотношение аналогичным образом получим

$$2E\xi\, d\xi + 2F\eta\, d\xi + 2F\xi\, d\eta + 2G\eta\, d\eta = 0$$

или

$$(E\xi + F\eta)\, d\xi + (F\xi + G\eta)\, d\eta = 0. \tag{375}$$

Итак, для нормального сечения, где $\widetilde{k}$ достигает экстремума, необходимо имеют место оба условия (374) и (375). Запишем условие совместности этих двух линейных однородных уравнений относительно $d\xi$, $d\eta$, т. е. приравняем нулю определитель системы [1]):

$$\begin{vmatrix} L\xi + M\eta & M\xi + N\eta \\ E\xi + F\eta & F\xi + G\eta \end{vmatrix} = 0. \tag{376}$$

Таково необходимое условие того, чтобы ξ, η отвечали нормальному сечению, для которого $\widetilde{k}$ достигает экстремума.

Умножая каждую строку определителя на ds и учитывая, что в силу (369)

$$\xi\, ds = du, \quad \eta\, ds = dv,$$

---

[1]) Случай одновременного обращения в нуль $d\xi(\varphi)$, $d\eta(\varphi)$ исключен, так как это означало бы $d\mathfrak{t}(\varphi) = 0$; между тем единичный вектор как функция угла поворота в плоскости имеет производную, отличную от нуля (тоже единичную).

получим условие (376) в виде

$$\begin{vmatrix} L\,du+M\,dv & M\,du+N\,dv \\ E\,du+F\,dv & F\,du+G\,dv \end{vmatrix}=0. \tag{377}$$

Здесь это условие наложено на du, dv, взятые вдоль того нормального сечения, для которого $\widetilde{k}$ достигает экстремума.

Прежде чем перейти к более детальному исследованию, нужно устранить из рассмотрения один исключительный случай.

А именно, может оказаться, что в данной точке коэфициенты второй квадратичной формы пропорциональны соответствующим коэфициентам первой формы:

$$L:E=M:F=N:G=\omega, \tag{378}$$

где ω — коэфициент пропорциональности. В таком случае при любых du, dv отношение второй квадратичной формы к первой остается постоянным и равным ω, так что формула (372′) дает для $\widetilde{k}$ постоянное значение ω.

В этом случае рассматриваемая точка поверхности называется *точкой закругления* или *омбилической*. В такой точке кривизны нормальных сечений одинаковы по всем направлениям, так что поверхность устроена вблизи этой точки сходно со сферой (точнее, совпадает со сферой с точностью 2-го порядка). У сферы все точки, очевидно, суть точки закругления и, как можно было бы доказать, сфера есть единственная поверхность, обладающая этим свойством [1]).

Итак, в дальнейшем предполагается, что изучаемая точка не есть точка закругления. Перепишем условие (376) в развернутом виде

$$(LF-ME)\xi^2+(LG-NE)\xi\eta+(MG-NF)\eta^2=0. \tag{379}$$

Из числа коэфициентов в левой части хоть один отличен от нуля. Действительно, в противном случае каждое из выражений в круглых скобках должно было бы обратиться в нуль, откуда следовала бы пропорциональность коэфициентов первой и второй квадратичной форм, т. е. имели бы место условия (378). Между тем случай точки закругления устранен из рассмотрения.

Теперь легко видеть, что условие (379) соблюдается не более чем для двух нормальных сечений. Действительно, если коэфициент при ξ^2 отличен от нуля, то, деля левую часть на η^2, получим [2])

$$(LF-ME)\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2+(LG-NE)\frac{\xi}{\eta}+(MG-NF)=0. \tag{380}$$

---

[1]) В случае $\widetilde{k}=0$ мы имеем предельный случай сферы — плоскость.

[2]) η заведомо отлично от нуля, так как в противном случае ξ тоже обратилось бы в нуль, как видно из (379). Между тем вектор (370) единичный и не может обращаться в нуль.

Решая это квадратное уравнение, получаем не более двух значений для отношения $\frac{\xi}{\eta}$ (напоминаем, что комплексные корни для нас сейчас не существуют). Но отношение $\frac{\xi}{\eta}$ вполне определяет выбор соответствующего нормального сечения. Действительно, из (369) следует, что отношение $\xi:\eta$ есть не что иное, как $du:dv$ для данного нормального сечения; а отношение $du:dv$, как подробно выяснено в § 35, однозначно определяет направление касательной в данной точке для всякой кривой на поверхности. Следовательно, значение $\xi:\eta$ определяет направление касательной MT к нормальному сечению. Имея не более двух значений для $\xi:\eta$, мы получим не более двух нормальных сечений, удовлетворяющих (379).

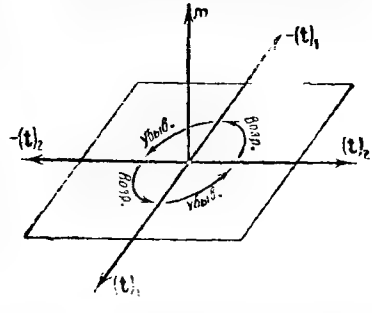
Если бы коэфициент при ξ^2 оказался нулем, то мы проделали бы то же самое для отношения $\frac{\eta}{\xi}$, считая, что коэфициент при η^2 отличен от нуля. Наконец, если бы коэфициент при η^2 тоже оказался нулем, то уравнение (379) приняло бы вид

$$(LG - NE)\xi\eta = 0,$$

а так как все три коэфициента не обращаются в нуль, то или $\xi = 0$, или $\eta = 0$. Получаем снова два нормальных сечения (касающиеся координатных линий), для которых (379) соблюдается.

Итак, необходимое условие экстремума (379) соблюдается не более чем для двух нормальных сечений. Но два таких сечения существуют заведомо. А именно, когда мы рассматриваем $\widetilde{k}$ как функцию угла φ, непрерывную в области изменения φ от 0 до π, то по общим свойствам непрерывных функций $\widetilde{k}(\varphi)$ достигает своего абсолютного максимума и абсолютного минимума при некоторых значениях φ. Для соответствующих нормальных сечений необходимо соблюдается условие (379).

Следовательно, *существуют два и только два нормальных сечения, удовлетворяющих условию* (379)[1]. *Это суть сечения, для которых* $\widetilde{k}$ *достигает соответственно абсолютного максимума* и *абсолютного минимума.* Так как никакие другие нормальные сечения условию (379) не удовлетворяют, то других максимумов и минимумов, даже относительных, $\widetilde{k}$ иметь не может.



Черт. 87.

Поэтому при вращении вектора t в касательной плоскости α будут существовать два взаимно обратных его положения $(t)_1$ и $-(t)_1$, которым отвечает одно и то же нормальное сече-

[1]) Или, что то же самое, условию (376) или (377).

ние с абсолютным максимумом $\widetilde{k}$, и два взаимно обратных положения $(t)_2$ и $-(t)_2$, которым отвечает нормальное сечение с абсолютным минимумом $\widetilde{k}$. В промежутках же между этими положениями $\widetilde{k}$ будет меняться монотонно ввиду отсутствия других максимумов и минимумов (черт. 87).

Нормальные сечения, отвечающие максимуму и минимуму $\widetilde{k}$, называются главными сечениями в данной точке. Значения кривизны $\widetilde{k}$ для них, соответственно максимальное k_1 и минимальное k_2, называются *главными кривизнами* поверхности в данной точке.

Поскольку $\widetilde{k}$ есть переменное, могущее иметь как положительные, так и отрицательные значения, то то же относится к его экстремумам k_1 и k_2.

Направления касательных к главным сечениям в данной точке называются *главными направлениями.*

Подчеркнем еще, что в предшествующих выкладках содержался и метод для практического отыскания главных направлений. А именно, из квадратного уравнения (379) мы находим отношение $\xi : \eta$, или, что то же самое, $du : dv$, которое и характеризует направление касательной к главному сечению, т. е. главное направление.

§ 40. Основные свойства главных направлений.

В этом параграфе нам понадобится запись второй квадратичной формы в несколько измененном виде.

Рассматривая вдоль поверхности радиус-вектор $\mathbf{r}$ и единичный нормальный вектор $\mathbf{m}$ как функции от u, v:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v),$$
$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(u, v),$$

мы записывали коэфициенты второй квадратичной формы в виде

$$\left.\begin{aligned} L &= \mathbf{r}_{uu}\mathbf{m}, \\ M &= \mathbf{r}_{uv}\mathbf{m}, \\ N &= \mathbf{r}_{vv}\mathbf{m} \end{aligned}\right\} \qquad (381)$$

[формулы (359)].

Эти выражения мы сейчас преобразуем. Запишем, что векторы $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$, как касательные к поверхности, ортогональны к ее нормальному вектору $\mathbf{m}$:

$$\mathbf{r}_u\mathbf{m} = 0,$$
$$\mathbf{r}_v\mathbf{m} = 0.$$

(Ортогональность записана здесь путем приравнивания нулю скалярных произведений.) Так как эти равенства имеют место в любой точке поверхности, т. е. при любых u, v, то их можно диференцировать по u, v. Возьмем частные производные по u; получим

$$\mathbf{r}_{uu}\mathbf{m} + \mathbf{r}_u\mathbf{m}_u = 0;$$
$$\mathbf{r}_{vu}\mathbf{m} + \mathbf{r}_v\mathbf{m}_u = 0.$$

Совершенно аналогично, поменяв ролями u и v, получим

$$\mathbf{r}_{vv}\mathbf{m} + \mathbf{r}_v\mathbf{m}_v = 0;$$
$$\mathbf{r}_{uv}\mathbf{m} + \mathbf{r}_u\mathbf{m}_v = 0.$$

Сопоставляя равенства (381) с вновь полученными, легко находим

$$\left.\begin{aligned} L &= \mathbf{r}_{uu}\mathbf{m} = -\mathbf{r}_u\mathbf{m}_u, \\ M &= \mathbf{r}_{uv}\mathbf{m} = -\mathbf{r}_v\mathbf{m}_u = -\mathbf{r}_u\mathbf{m}_v, \\ N &= \mathbf{r}_{vv}\mathbf{m} = -\mathbf{r}_v\mathbf{m}_v. \end{aligned}\right\} \qquad (382)$$

Таковы *дополнительные выражения для коэфициентов второй квадратичной формы*. Исходя из них, мы получим важные выражения для полярной билинейной формы и самой квадратичной формы.

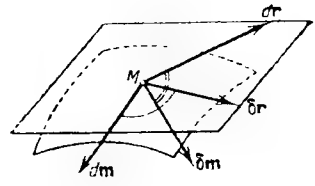
Пусть из данной точки поверхности произведены бесконечно малые смещения по двум кривым. Диференциалы координат u, v, отвечающие смещению по одной кривой, обозначим du, dv, а по другой δu, δv. Соответствующие диференциалы функций $\mathbf{r}(u, v)$ и $\mathbf{m}(u, v)$ будут

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u\,du + \mathbf{r}_v\,dv, \quad d\mathbf{m} = \mathbf{m}_u\,du + \mathbf{m}_v\,dv$$

и

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_u\,\delta u + \mathbf{r}_v\,\delta v, \quad \delta\mathbf{m} = \mathbf{m}_u\,\delta u + \mathbf{m}_v\,\delta v.$$

Эти диференциалы всегда лежат в касательной плоскости в точке M, потому что $d\mathbf{r}$, $\delta\mathbf{r}$ направлены по касательным к кривым, проведенным по поверхности, а $d\mathbf{m}$, $\delta\mathbf{m}$ как диференциалы единичного вектора $\mathbf{m}$ обязательно ему перпендикулярны (черт. 88).



Черт. 88.

Составим теперь скалярное произведение диференциала радиуса-вектора $\mathbf{r}$, отвечающего одному смещению, на диференциал вектора $\mathbf{m}$, отвечающий другому смещению. Получим

$$d\mathbf{r}\,\delta\mathbf{m} = (\mathbf{r}_u\,du + \mathbf{r}_v\,dv)(\mathbf{m}_u\,\delta u + \mathbf{m}_v\,\delta v) =$$
$$= \mathbf{r}_u\mathbf{m}_u\,du\,\delta u + \mathbf{r}_u\mathbf{m}_v\,du\,\delta v + \mathbf{r}_v\mathbf{m}_u\,dv\,\delta u + \mathbf{r}_v\mathbf{m}_v\,dv\,\delta v.$$

Учитывая новые выражения для коэфициентов L, M, N, можно написать

$$d\mathbf{r}\,\delta\mathbf{m} = -(L\,du\,\delta u + M\,du\,\delta v + M\,dv\,\delta u + N\,dv\,\delta v). \qquad (383)$$

Вычисляя теперь скалярное произведение $d\mathbf{m}\,\delta\mathbf{r}$, мы должны в этой формуле поменять ролями символы d и δ. Но правая часть совершенно симметрична относительно d, δ, так что после их перестановки получится прежнее выражение. Итак, окончательно

$$d\mathbf{r}\,\delta\mathbf{m} = d\mathbf{m}\,\delta\mathbf{r} = -(L\,du\,\delta u + M\,du\,\delta v + M\,dv\,\delta u + N\,dv\,\delta v). \qquad (384)$$

В правой части стоит билинейная форма относительно du, dv, δu, δv, полярная второй квадратичной форме. Ее геометрический смысл заключается в том, что она с обратным знаком равна скалярному произведению дифференциала $\mathbf{r}$ по любому из двух направлений на дифференциал $\mathbf{m}$ по другому из этих направлений.

В частности, можно взять оба смещения совпадающими, тогда

$$\delta u = du, \quad \delta v = dv,$$
$$\delta \mathbf{r} = d\mathbf{r}, \quad \delta \mathbf{m} = d\mathbf{m}$$

и формула (383) примет вид

$$d\mathbf{r}\, d\mathbf{m} = -(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2). \tag{385}$$

Итак, *при смещении по любой кривой на поверхности вторая квадратичная форма равна взятому с обратным знаком скалярному произведению дифференциалов векторов* $\mathbf{r}$ *и* $\mathbf{m}$.

Напомним еще одну формулу, которая нам будет нужна. Перемножая скалярно выражения (345) для $d\mathbf{r}$ и $\delta\mathbf{r}$ и учитывая, что

$$\mathbf{r}_u\mathbf{r}_u = E, \ \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v = F, \ \mathbf{r}_v\mathbf{r}_v = G,$$

получим

$$d\mathbf{r}\,\delta\mathbf{r} = E\,du\,\delta u + F\,du\,\delta v + F\,dv\,\delta u + G\,dv\,\delta v. \tag{386}$$

Установив эти результаты, касающиеся второй квадратичной формы вообще, применим их к изучению главных направлений в данной точке поверхности.

Мы знаем, что для того чтобы нормальное сечение было главным, т. е. чтобы касательная к нему шла по главному направлению, необходимо и достаточно, чтобы дифференциалы du, dv при смещении по этому нормальному сечению удовлетворяли условию (377). Но это уравнение однородно относительно du, dv и наложено в сущности не на du, dv, а на их отношение $du : dv$.

Как мы знаем (§ 35), отношение $du : dv$ будет общим в данной точке для всех кривых на поверхности, имеющих общую касательную; для любой кривой оно будет таким же, как и для нормального сечения с той же касательной. Поэтому условие (377) соблюдается не только для главных сечений, но и для любой кривой, касательная к которой тоже направлена по главному направлению (и только для таких кривых).

Мы будем в дальнейшем говорить о дифференциалах du, dv при смещении в главном направлении, имея в виду смещение из данной точки по любой кривой, касательная к которой идет в главном направлении (в частности, по главному сечению).

Тогда, как только что было сказано, соблюдается условие (377)

$$\begin{vmatrix} L\,du + M\,dv, & M\,du + N\,dv \\ E\,du + F\,dv, & F\,du + G\,dv \end{vmatrix} = 0.$$

Обращение в нуль определителя 2-го порядка означает, что элементы одной строки пропорциональны элементам другой:

$$\left.\begin{aligned} L\,du + M\,dv &= a(E\,du + F\,dv),\\ M\,du + N\,dv &= a(F\,du + G\,dv). \end{aligned}\right\} \tag{387}$$

Здесь через a обозначен коэфициент пропорциональности [1]).

Выясним его геометрический смысл. Умножая первое равенство на du, а второе на dv и складывая их почленно, получим

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = a(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2),$$

откуда

$$a = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Мы видим, что, согласно (372′), a представляет собой кривизну $\widetilde{k}$ нормального сечения, которому отвечают du, dv. В нашем случае речь идет о главном сечении, следовательно, $\widetilde{k}$ представляет собой соответствующую этому сечению главную кривизну. Теперь можно переписать формулы (387) в виде

$$\left.\begin{aligned} L\,du + M\,dv &= \widetilde{k}(E\,du + F\,dv),\\ M\,du + N\,dv &= \widetilde{k}(F\,du + G\,dv), \end{aligned}\right\} \tag{388}$$

где du, dv — диференциалы координат, отвечающие смещению по какому-нибудь из двух главных направлений, а $\widetilde{k}$ — соответствующая главная кривизна. Формулы (388) играют такую же основную роль как и условие (377).

Перепишем (388), вставив вместо L, M, N их выражения из формул (382), а вместо E, F, G — их выражения (342). Получим

$$\begin{aligned} -\mathbf{r}_u\mathbf{m}_u\,du - \mathbf{r}_u\mathbf{m}_v\,dv &= \widetilde{k}(\mathbf{r}_u\mathbf{r}_u\,du + \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v\,dv),\\ -\mathbf{r}_v\mathbf{m}_u\,du - \mathbf{r}_v\mathbf{m}_v\,dv &= \widetilde{k}(\mathbf{r}_v\mathbf{r}_u\,du + \mathbf{r}_v\mathbf{r}_v\,dv), \end{aligned}$$

или, вынося за скобки множитель $\mathbf{r}_u$ в скалярных произведениях в первом равенстве и множитель $\mathbf{r}_v$ во втором равенстве:

$$\begin{aligned} -\mathbf{r}_u(\mathbf{m}_u\,du + \mathbf{m}_v\,dv) &= \widetilde{k}\mathbf{r}_u(\mathbf{r}_u\,du + \mathbf{r}_v\,dv),\\ -\mathbf{r}_v(\mathbf{m}_u\,du + \mathbf{m}_v\,dv) &= \widetilde{k}\mathbf{r}_v(\mathbf{r}_u\,du + \mathbf{r}_v\,dv). \end{aligned}$$

Мы видим, что в скобках стоят диференциалы $d\mathbf{m}$ и $d\mathbf{r}$, отвечающие смещению по рассматриваемому главному направлению. Поэтому равен-

[1]) Запись пропорциональности в виде (387) всегда законна, так как элементы второй строки определителя не могут обращаться в нуль одновременно. Действительно, система $E\,du + F\,dv = 0$, $F\,du + G\,dv = 0$ несовместна, так как ее определитель $EG - F^2$ согласно (353) всегда больше нуля.

ства можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} -\mathbf{r}_u\,d\mathbf{m} &= \widetilde{k}\mathbf{r}_u\,d\mathbf{r} \quad \text{или} \quad \mathbf{r}_u(d\mathbf{m}+\widetilde{k}\,d\mathbf{r})=0,\\ -\mathbf{r}_v\,d\mathbf{m} &= \widetilde{k}\mathbf{r}_v\,d\mathbf{r} \quad \text{или} \quad \mathbf{r}_v(d\mathbf{m}+\widetilde{k}\,d\mathbf{r})=0. \end{aligned}\right\} \tag{389}$$

Вектор $d\mathbf{m}+\widetilde{k}\,d\mathbf{r}$ лежит в касательной плоскости к поверхности, так как в ней расположены $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{m}$ ($d\mathbf{r}$ — как касательный, а $d\mathbf{m}\perp\mathbf{m}$, как диференциал единичного вектора). Если допустить, что $d\mathbf{m}+\widetilde{k}\,d\mathbf{r}$ отличен от нуля, то формулы (389) показывают, что $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ оба к нему перпендикулярны. А так как все три вектора лежат в одной плоскости (касательной), то $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ должны быть параллельны, что исключено согласно нашему основному допущению (327). Итак, $d\mathbf{m}+\widetilde{k}\,d\mathbf{r}$ необходимо должен быть равен нулю, и мы получаем

$$d\mathbf{m} = -\widetilde{k}\,d\mathbf{r}. \tag{390}$$

Эта очень простая и выразительная формула показывает, что при смещении по главному направлению из данной точки M диференциал вектора $\mathbf{m}$ коллинеарен $d\mathbf{r}$ и направлен, следовательно, вместе с ним по касательной к линии смещения, т. е. по главному направлению. Скалярным коэфициентом служит соответствующая главная кривизна с обратным знаком. Формула (390), имеющая место для каждого из двух главных направлений, называется *формулой Родрига* и имеет большое значение в теории поверхностей. Покажем, что коллинеарность векторов $d\mathbf{m}$ и $d\mathbf{r}$ при смещении из данной точки M по какому-нибудь направлению не только необходима, но и *достаточна* для того, чтобы это направление было главным. Действительно, если $d\mathbf{m}\parallel d\mathbf{r}$, то можно записать

$$d\mathbf{m} = a\,d\mathbf{r}, \tag{391}$$

где a — некоторый скалярный коэфициент, относительно которого заранее никаких допущений не делается. Перепишем (391) в развернутом виде:

$$\mathbf{m}_u\,du+\mathbf{m}_v\,dv = a(\mathbf{r}_u\,du+\mathbf{r}_v\,dv).$$

Умножая скалярно обе части равенства на $\mathbf{r}_u$ и учитывая выражения коэфициентов первой и второй квадратичных форм (342) и (382), получим

$$-L\,du-M\,dv = a(E\,du+F\,dv)$$

или

$$(L\,du+M\,dv)+a(E\,du+F\,dv)=0.$$

Совершенно аналогично, умножая скалярно (391) на $\mathbf{r}_v$, получим

$$(M\,du+N\,dv)+a(F\,du+G\,dv)=0.$$

Исключая из последних двух уравнений коэфициент a, мы получаем

$$\begin{vmatrix} L\,du+M\,dv & E\,du+F\,dv \\ M\,du+N\,dv & F\,du+G\,dv \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. возвращаемся к условию (377). А оно означает, что du, dv действительно отвечают смещению по главному направлению.

Извлечем, наконец, очень важное следствие из формул Родрига, а именно покажем, что *главные направления ортогональны между собой*. Пусть du, dv и k_1 — дифференциалы координат и главная кривизна, отвечающие одному главному направлению, а δu, δv, k_2 — аналогичные величины для другого. Запишем формулу Родрига для каждого из этих направлений:

$$d\mathbf{m} = -k_1 d\mathbf{r}, \quad \delta\mathbf{m} = -k_2 \delta\mathbf{r}.$$

Умножив скалярно первую из этих формул на $\delta\mathbf{r}$, а вторую на $d\mathbf{r}$, получим

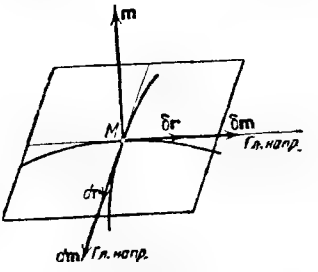
$$d\mathbf{m}\,\delta\mathbf{r} = -k_1 d\mathbf{r}\,\delta\mathbf{r}, \quad \delta\mathbf{m}\,d\mathbf{r} = -k_2 \delta\mathbf{r}\,d\mathbf{r}. \tag{392}$$

Но согласно (384) левые части этих формул равны; поэтому, вычитая формулы (392) одну из другой почленно, получим

$$0 = (k_2 - k_1)\, d\mathbf{r}\,\delta\mathbf{r}.$$

Так как k_1 и k_2 являются максимумом и минимумом функции $\widetilde{k}$ (которая не остается все время постоянной: точки закругления исключены из рассмотрения), то $k_1 \neq k_2$, и предшествующее равенство равносильно такому:

$$d\mathbf{r}\,\delta\mathbf{r} = 0. \tag{393}$$



Черт. 89.

Итак, векторы $d\mathbf{r}$ и $\delta\mathbf{r}$ перпендикулярны между собой, а так как они направлены по касательным к соответствующим главным сечениям (черт. 89), то главные направления в каждой точке поверхности взаимно перпендикулярны.

Перепишем левую часть (393) в развернутом виде (386):

$$d\mathbf{r}\,\delta\mathbf{r} = E\,du\,\delta u + F\,du\,\delta v + F\,dv\,\delta u + G\,dv\,\delta v = 0. \tag{394}$$

Кроме того, теперь левые части формул (392) также оказываются равными нулю, так как обратились в нуль их правые части. Записывая левые части (392) в развернутом виде (384), получим

$$d\mathbf{r}\,\delta\mathbf{m} = d\mathbf{m}\,\delta\mathbf{r} = -(L\,du\,\delta u + M\,du\,\delta v + M\,dv\,\delta u + N\,dv\,\delta v) = 0. \tag{395}$$

Итак, при смещении из данной точки M по главным направлениям дифференциалы du, dv и δu, δv связаны между собой соотношениями (394) и (395).

Первое из них выражает *ортогональность* главных направлений, а второе — их *сопряженность*. Вообще два направления, касательные к поверхности в данной точке, называются *сопряженными*, если дифференциал вектора $\mathbf{m}$ при смещении по одному (любому) из этих напра-

влений [1]) ортогонален другому из них. Именно эта ортогональность и записана формулой (395) в форме обращения в нуль равных между собой скалярных произведений $d\mathbf{m}\,\delta\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}\,\delta\mathbf{m}$ ($d\mathbf{r}$ и $\delta\mathbf{r}$ направлены, конечно, по самим рассматриваемым направлениям).

Как мы видим, главные направления являются одновременно ортогональными и сопряженными. Можно было бы показать, что это свойство не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы два касательных направления были *главными*.

В этом параграфе мы установили важные свойства главных направлений, которые используем в следующих двух параграфах для окончательного выяснения возможного строения поверхности вблизи данной точки.

§ 41. Формула Эйлера.

После установления ортогональности главных направлений и формул Родрига для каждого из них можно представить в очень наглядном и легко обозримом виде закон изменения кривизны $\widetilde{k}$ в зависимости от выбора нормального сечения.

Будем рассматривать бесконечно малые смещения из данной точки по всевозможным направлениям по поверхности, точнее, дифференциалы радиуса-вектора, отвечающие этим смещениям:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u\,du + \mathbf{r}_v\,dv. \tag{396}$$

Одновременно рассмотрим дифференциалы единичной нормали $\mathbf{m}$, отвечающие тем же смещениям:

$$d\mathbf{m} = \mathbf{m}_u\,du + \mathbf{m}_v\,dv. \tag{397}$$

Легко заметить, что при произвольном изменении du, dv вектор $d\mathbf{m}$ есть, как говорят, линейная вектор-функция вектора $d\mathbf{r}$.

Под этим мы понимаем следующее. Во-первых, если вектор $d\mathbf{r}$ умножить на какое-нибудь число, — а это происходит тогда и только тогда, когда du и dv умножаются на то же число, — то $d\mathbf{m}$, очевидно, *умножается на то же число*. Во-вторых, пусть смещение $d\mathbf{r}$ есть сумма двух смещений $d_1\mathbf{r}$ и $d_2\mathbf{r}$:

$$d_1\mathbf{r} = \mathbf{r}_u\,d_1u + \mathbf{r}_v\,d_1v,$$
$$d_2\mathbf{r} = \mathbf{r}_u\,d_2u + \mathbf{r}_v\,d_2v,$$

где d_1u, d_1v — дифференциалы координат, отвечающие $d_1\mathbf{r}$, а d_2u, d_2v — отвечающие $d_2\mathbf{r}$. Итак, пусть

$$d\mathbf{r} = d_1\mathbf{r} + d_2\mathbf{r}.$$

Это имеет место, очевидно, тогда и только тогда, когда

$$du = d_1u + d_2u, \quad dv = d_1v + d_2v. \tag{398}$$

[1]) Точнее, при смещении по какой-нибудь кривой (на поверхности), касательной к этому направлению.

Если теперь взять диференциалы $\mathbf{m}$, отвечающие смещениям $d_1\mathbf{r}$, $d_2\mathbf{r}$:

$$d_1\mathbf{m} = \mathbf{m}_u d_1 u + \mathbf{m}_v d_1 v,$$

$$d_2\mathbf{m} = \mathbf{m}_u d_2 u + \mathbf{m}_v d_2 v,$$

то сумма их дает $d\mathbf{m}$, как это следует из (398) и (397).

Итак, *смещению* $d\mathbf{r}$, *представляющему сумму смещений* $d_1\mathbf{r} + d_2\mathbf{r}$, *отвечает диференциал* $d\mathbf{m}$, *представляющий собой сумму соответствующих диференциалов* $d_1\mathbf{m} + d_2\mathbf{m}$.

Установив таким образом линейный характер зависимости $d\mathbf{m}$ от $d\mathbf{r}$, разложим произвольное смещение $d\mathbf{r}$ по *главным* направлениям в данной точке:

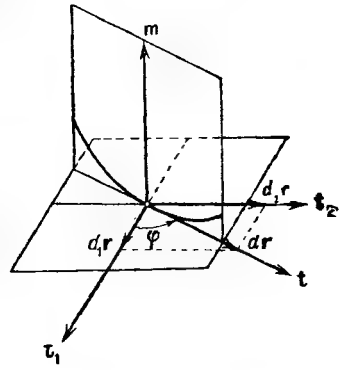
$$d\mathbf{r} = d_1\mathbf{r} + d_2\mathbf{r} \qquad (399)$$

(черт. 90). Тогда

$$d\mathbf{m} = d_1\mathbf{m} + d_2\mathbf{m}.$$

Но так как $d_1\mathbf{r}$ и $d_2\mathbf{r}$ — смещения по главным направлениям, то отвечающие им $d_1\mathbf{m}$ и $d_2\mathbf{m}$ можно записать по формулам Родрига:

$$d_1\mathbf{m} = -k_1 d_1\mathbf{r}, \quad d_2\mathbf{m} = -k_2 d_2\mathbf{r}.$$



Черт. 90.

Следовательно

$$d\mathbf{m} = -k_1 d_1\mathbf{r} - k_2 d_2\mathbf{r}. \qquad (400)$$

Обозначим через $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$ единичные векторы по главным направлениям; пусть φ и $\frac{\pi}{2} - \varphi$ будут углы, образованные с ними направлением $d\mathbf{r}$ (черт. 90). Так как длина вектора $d\mathbf{r}$ равна диференциалу дуги ds, то его проекции на $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ будут $ds\cos\varphi$ и $ds\sin\varphi$, и разложение (399) можно переписать в виде

$$d\mathbf{r} = ds\cos\varphi \cdot \mathbf{t}_1 + ds\sin\varphi \cdot \mathbf{t}_2.$$

Подставляя в (400) новые выражения для $d_1\mathbf{r}$ и $d_2\mathbf{r}$, получим

$$d\mathbf{m} = -k_1 ds\cos\varphi \cdot \mathbf{t}_1 - k_2 ds\sin\varphi \cdot \mathbf{t}_2.$$

Деля на ds обе последние формулы, получим

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{t} = \cos\varphi \cdot \mathbf{t}_1 + \sin\varphi \cdot \mathbf{t}_2, \qquad (401)$$

$$\frac{d\mathbf{m}}{ds} = -k_1\cos\varphi \cdot \mathbf{t}_1 - k_2\sin\varphi \cdot \mathbf{t}_2. \qquad (402)$$

Формула (402) весьма интересна, так как дает разложение $\frac{d\mathbf{m}}{ds}$ по $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ вдоль любой кривой в данной точке. Это разложение лишь множителями $-k_1$, $-k_2$ отличается от разложения (401) для единичного касательного вектора $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ к той же кривой.

Искомая формула, выражающая закон изменения кривизны $\tilde{k}$ в зависимости от выбора нормального сечения, получается как простое следствие. Перемножим скалярно формулы (401) и (402), взяв в качестве рассматриваемой кривой на поверхности какое-нибудь нормальное сечение. Получим (изменив знаки на обратные)

$$-\frac{d\mathbf{r}\,d\mathbf{m}}{ds^2} = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi. \qquad (402')$$

При вычислении правой части мы учли, конечно, что

$$\mathbf{t}_1^2 = \mathbf{t}_2^2 = 1, \quad \mathbf{t}_1\mathbf{t}_2 = 0.$$

Вспоминая, что $d\mathbf{r}\,d\mathbf{m}$ лишь знаком отличается от второй квадратичной формы [см. (385)], мы можем переписать левую часть равенства в виде

$$\frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{ds^2},$$

а это есть не что иное, как кривизна $\tilde{k}$ соответствующего нормального сечения [см. (372')]. В результате равенство (402') перепишется в виде

$$\tilde{k} = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi. \qquad (403)$$

Это и есть *формула Эйлера*, выражающая кривизну любого нормального сечения через главные кривизны и угол φ, образуемый этим нормальным сечением (т. е. его касательной) с одним из главных направлений.

Благодаря простоте формулы (403) с ее помощью легко проследить изменение $\tilde{k}$ в зависимости от φ. При $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$ мы получаем первое из главных сечений, формула (403) дает $\tilde{k} = k_1$. При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ или $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ мы получаем второе главное сечение, и (403) дает $\tilde{k} = k_2$.

Формула Эйлера имеет некоторые простые следствия. Прежде всего, нормальные сечения, касательные к которым симметрично расположены относительно главных направлений, обладают одинаковой кривизной.

Действительно, если вектор $\mathbf{t}$ образует с $\mathbf{t}_1$ угол φ для данного нормального сечения, то вектор, направленный к $\mathbf{t}_1$ под углом $-\varphi$, пойдет по касательной симметричного нормального сечения. Но правая часть (403) для φ и $-\varphi$ сохраняет одно и то же значение.

Таким образом распределение кривизны нормальных сечений симметрично относительно каждого из главных направлений. Далее, сумма кривизн $\tilde{k}$ для нормальных сечений со взаимно ортогональными касательными остается постоянной и равной сумме главных кривизн. Действительно, если для данного нормального сечения вектор $\mathbf{t}$ направлен под углом φ, то для ортогонального к нему сечения вектор $\mathbf{t}$ нужно

направить под углом $\varphi+\frac{\pi}{2}$. Обозначая через $\widetilde{k}'$ и $\widetilde{k}''$ кривизны этих нормальных сечений, имеем согласно формуле Эйлера

$$\widetilde{k}' = k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi,$$
$$\widetilde{k}'' = k_1\cos^2\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) + k_2\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right).$$

или

$$\widetilde{k}'' = k_1\sin^2\varphi + k_2\cos^2\varphi.$$

Складывая почленно, получим

$$\widetilde{k}' + \widetilde{k}'' = k_1 + k_2, \tag{404}$$

чем наше утверждение доказано.

§ 42. Исследование главных кривизн и три типа точек на поверхности.

Мы уже умеем находить главные направления в данной точке поверхности, но до сих пор у нас не было еще формулы для отыскания главных кривизн. Сейчас мы ее выведем. Будем исходить из формул (388), связывающих du, dv для данного главного направления с соответствующей главной кривизной $\widetilde{k}$:

$$L\,du + M\,dv = \widetilde{k}(E\,du + F\,dv),$$
$$M\,du + N\,dv = \widetilde{k}(F\,du + G\,dv).$$

Перенося все члены влево, можно переписать эти уравнения в виде

$$\left.\begin{aligned}(L-\widetilde{k}E)\,du + (M-\widetilde{k}F)\,dv = 0,\\ (M-\widetilde{k}F)\,du + (N-\widetilde{k}G)\,dv = 0.\end{aligned}\right\} \tag{405}$$

Так как для главного направления du, dv и главной кривизны $\widetilde{k}$ эта система двух однородных уравнений относительно du, dv совместна, то определитель этой системы должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} L-\widetilde{k}E & M-\widetilde{k}F \\ M-\widetilde{k}F & N-\widetilde{k}G \end{vmatrix} = 0. \tag{406}$$

Мы получаем квадратное уравнение относительно $\widetilde{k}$, которому должны удовлетворять главные кривизны $\widetilde{k}_1$ и $\widetilde{k}_2$ и из которого их можно определить. Напишем это уравнение в развернутом виде:

$$(EG-F^2)\widetilde{k}^2 + (2MF-EN-LG)\widetilde{k} + (LN-M^2) = 0. \tag{407}$$

Нетрудно было бы написать явные выражения для каждой из главных кривизн k_1, k_2, как для корней этого квадратного уравнения. Но эти выражения были бы довольно громоздки, и вычисление их не дало бы какого-либо преимущества. Зато из уравнения (407) можно сравнительно просто получить сумму и произведение главных кривизн. Действительно, после того как левая часть уравнения будет поделена на коэфициент при $\widetilde{k}^2$, т. е. на $EG - F^2$, произведение корней будет равно свободному члену, а сумма корней — коэфициенту при $\widetilde{k}$ с обратным знаком. Итак,

$$k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

$$k_1 + k_2 = \frac{EN + LG - 2MF}{EG - F^2}.$$

Произвведение главных кривизн в данной точке поверхности *называется полной или гауссовой кривизной* поверхности в данной точке. Эта величина играет огромную роль в теории поверхностей по причинам, которые выяснятся в главе VII. Мы будем обозначать гауссову кривизну через K.

Полусумма главных кривизн в данной точке поверхности *называется средней кривизной* поверхности. Ее мы будем обозначать через H[1]). Окончательно предшествующие формулы перепишутся в виде

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \tag{408}$$

$$2H = k_1 + k_2 = \frac{EN + LG - 2MF}{EG - F^2}. \tag{409}$$

Мы видим, что гауссова кривизна K равна отношению дискриминантов второй и первой квадратичных форм.

Для того чтобы окончательно составить себе представление о поведении поверхности вблизи данной точки M, нам придется отдельно рассмотреть три возможных здесь случая.

I. В ДАННОЙ ТОЧКЕ M ГАУССОВА КРИВИЗНА K ПОЛОЖИТЕЛЬНА.

Так как знаменатель в правой части (408) всегда положителен [см. (353)], то K всегда имеет знак числителя. Итак, мы предполагаем, что в данной точке M

$$K > 0, \quad \text{т. е.} \quad LN - M^2 > 0. \tag{410}$$

В этом случае точка M называется *эллиптической*. Изучим поведение поверхности вблизи такой точки. Так как K, т. е. произведение $k_1 k_2$,

---

[1]) Заметим, что для точки закругления $K = \widetilde{k}^2$, $H = \widetilde{k}$ ($\widetilde{k}$ сохраняет постоянное значение).

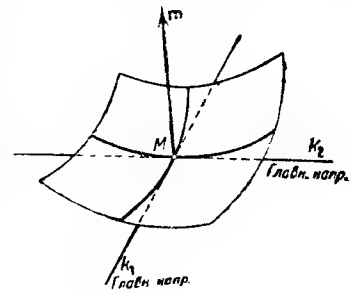
положительно, то главные кривизны k_1 и k_2 имеют одинаковый знак. Допустим для определенности, что

$$k_1 > 0, \quad k_2 > 0.$$

Таким образом оба главные сечения загибаются в одну и ту же сторону, именно в сторону вектора $\mathbf{m}$. Формула Эйлера

$$\tilde{k} = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi$$

показывает, что $\tilde{k}$ для всех нормальных сечений также положительно, так как положительны все члены в правой части. Следовательно, все нормальные сечения загибаются в сторону вектора $\mathbf{m}$, поверхность по всем направлениям загибается в одну сторону и располагается с одной стороны своей касательной плоскости (черт. 91). По самому определению главных кривизн, наибольшей и наименьшей кривизной обладают главные сечения, промежуточные же нормальные сечения имеют промежуточные значения кривизны.



Черт. 91.

Когда касательная к нормальному сечению, вращаясь около точки M, описывает прямой угол от одного главного направления до другого, кривизна $\tilde{k}$ нормального сечения, как легко видеть из формулы Эйлера, *монотонно* меняется от одного из значений k_1, k_2 до другого. При дальнейшем повороте на прямой угол это же монотонное изменение происходит в обратном порядке, и мы возвращаемся к исходному главному сечению.

Случай, когда k_1, k_2 обе отрицательны, ничем существенным не отличается от рассмотренного, только лишь все сечения загибаются в сторону $-\mathbf{m}$. Так как выбор положительного направления на нормали к поверхности условен, то можно при желании принять $-\mathbf{m}$ за $\mathbf{m}$. Тогда мы вернемся к случаю положительных k_1, k_2.

II. В ДАННОЙ ТОЧКЕ M ГАУССОВА КРИВИЗНА K ОТРИЦАТЕЛЬНА.

Так как K и $LN - M^2$ имеют всегда одинаковые знаки, то в такой точке

$$K < 0 \quad \text{и} \quad LN - M^2 < 0; \tag{41}$$

точка называется *гиперболической*. Так как K, т. е. произведение $k_1 k_2$, отрицательно, то k_1 и k_2 имеют разные знаки. Пусть, для определенности,

$$k_1 < 0, \quad k_2 > 0.$$

Следовательно, одно из главных сечений загибается в сторону, обратную $\mathbf{m}$, а другое — в сторону $\mathbf{m}$ (черт. 92). Когда касательная к нор-

мальному сечению, вращаясь около точки M, описывает прямой угол от одного главного направления до другого, его кривизна $\widetilde{k}$ растет монотонно от значения $k_1 < 0$ до значения $k_2 > 0$. Следовательно, по дороге $\widetilde{k}$ проходит через значение нуль. Найдем направление касательной к нормальному сечению с кривизной нуль. Воспользовавшись формулой Эйлера, приравняем нулю выражение для $\widetilde{k}$:

$$\widetilde{k} = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}. \tag{412}$$

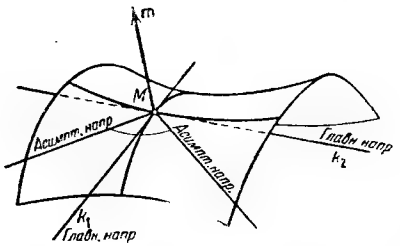
Заметим, что так как k_1 и k_2 разных знаков, то под корнем стоит положительная величина. Мы получаем два нормальных сечения: одно, направленное под углом

$$\varphi = \operatorname{arctg} \sqrt{-\frac{k_1}{k_2}},$$

и второе, направленное под углом

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \sqrt{-\frac{k_1}{k_2}},$$

и, следовательно, симметричное первому относительно главных направлений (напомним, что угол φ отсчитывается от одного из главных направлений).



Черт. 92.

Многозначность arctg не играет роли, так как добавление к φ угла, кратного π, приводит нас к прежнему нормальному сечению.

Итак, мы получили в точке M два нормальных сечения, имеющих в этой точке кривизну нуль. Касательные к этим сечениям в точке M расположены симметрично относительно главных направлений и образуют так называемые *асимптотические направления* в данной точке.

Из двух пар вертикальных углов, образованных асимптотическими направлениями, одна пара заключает, очевидно, направления, отвечающие нормальным сечениям с отрицательной кривизной $\widetilde{k}$, и в этих направлениях поверхность загибается „книзу“ (т. е. в сторону, обратную $\mathbf{m}$). Другая же пара заключает направления с положительной кривизной $\widetilde{k}$ соответствующих нормальных сечений; в этих направлениях поверхность загибается „кверху“ (т. е. в сторону $\mathbf{m}$). В результате поверхность вблизи гиперболической точки имеет седлообразную форму (черт. 92).

III. В ДАННОЙ ТОЧКЕ M ГАУССОВА КРИВИЗНА $K = 0$.

Как видно из (408), это условие равносильно такому:

$$LN - M^2 = 0; \tag{413}$$

точка называется в этом случае *параболической*.

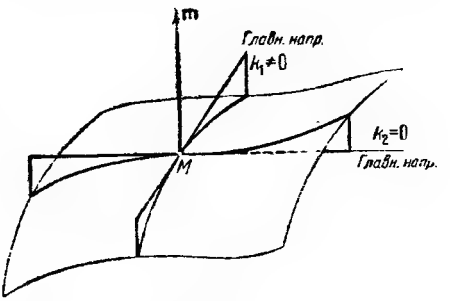
Так как в данной точке

$$K = k_1 k_2 = 0,$$

то по крайней мере один из множителей k_1, k_2 равен нулю. Пусть

$$k_1 \neq 0, \quad k_2 = 0. \tag{414}$$

Случай $k_1 = k_2 = 0$ оставляем в стороне, так как это есть частный случай точки закругления. Считая, для определенности, $k_1 < 0$, мы имеем одно главное сечение, загибающееся книзу. Что же касается другого главного сечения, то мы знаем, что плоская кривая в точке, где ее кривизна равна нулю, имеет точку перегиба, если оставить в стороне исключительные случаи (см. конец § 19).



Черт. 93.

Поэтому второе главное сечение перегибается с одной стороны своей касательной на другую. Поверхность имеет вид, изображенный на черт. 93.

Асимптотическое направление совпадает в этом случае с одним из главных направлений, именно отвечающим главной кривизне $k_2 = 0$. Других асимптотических направлений в параболической точке не будет, так как при переходе от одного главного сечения к другому кривизна $\tilde{k}$ меняется монотонно от $k_2 = 0$ до $k_1 \neq 0$ и, следовательно, больше через значение 0 не проходит.

Поверхность, сплошь состоящую из параболических точек, мы будем впоследствии подробно изучать. Вообще же говоря, параболические точки (где $K = 0$), если только они на поверхности имеются, образуют линию, отделяющую точки эллиптические (где $K > 0$) от точек гиперболических (где $K < 0$).

В типическом случае параболической точки, изображенном на черт. 93, эллиптические точки расположены, очевидно, в левой, а гиперболические — в правой части поверхности. Их отделяет некоторая кривая на поверхности, состоящая из параболических точек и проходящая через M.

Примеры.

1. Применим предшествующую теорию к *поверхности вращения*. Радиус-вектор выражается у нас (см. конец § 36) так:

$$\mathbf{r} = \psi(u)\,\mathbf{e}(v) + \varphi(u)\,\mathbf{k}.$$

Выберем в качестве параметра u на исходной кривой C координату z; тогда $z = \varphi(u) = u$, так что уравнение поверхности примет упрощенный вид

$$\mathbf{r} = \psi(u)\,\mathbf{e}(v) + u\mathbf{k}.$$

Вычисляем производные и коэфициенты первой и второй квадратичных форм. Имеем

$$\mathbf{r}_u = \dot{\psi}\mathbf{e}(v) + \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_v = \psi\mathbf{e}\left(v + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\mathbf{r}_{uu} = \ddot{\psi}\mathbf{e}(v), \quad \mathbf{r}_{uv} = \dot{\psi}\mathbf{e}\left(v + \frac{\pi}{2}\right), \quad \mathbf{r}_{vv} = -\psi\mathbf{e}(v).$$

Отсюда

$$E = 1 + \dot{\psi}^2, \quad F = 0, \quad G = \psi^2,$$

и так как

$$\mathbf{m} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|} = \frac{\psi\dot{\psi}\mathbf{k} - \psi\mathbf{e}(v)}{\psi\sqrt{1+\dot{\psi}^2}} = \frac{\dot{\psi}\mathbf{k} - \mathbf{e}(v)}{\sqrt{1+\dot{\psi}^2}},$$

то

$$L = \mathbf{r}_{uu}\mathbf{m} = -\frac{\ddot{\psi}}{\sqrt{1+\dot{\psi}^2}}, \quad M = \mathbf{r}_{uv}\mathbf{m} = 0, \quad N = \mathbf{r}_{vv}\mathbf{m} = \frac{\psi}{\sqrt{1+\dot{\psi}^2}}.$$

Определяя главные направления по формуле (377), получим

$$\begin{vmatrix} L & N \\ E & G \end{vmatrix} du\, dv = 0,$$

откуда или $du = 0$, или $dv = 0$, т. е. главные направления совпадают с касательными к координатным линиям — меридианам и параллелям нашей поверхности вращения.

Вычислим по формуле (372′) главные кривизны как значения $\widetilde{k}$, отвечающие главным направлениям. Положив сначала $dv = 0$ (направление меридиана), потом $du = 0$ (направление параллели), получим соответственно:

$$k_1 = \frac{L}{E} = -\frac{\ddot{\psi}}{(1+\dot{\psi}^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = \frac{N}{G} = \frac{1}{\psi\sqrt{1+\dot{\psi}^2}}.$$

Интересно отметить, что, так как в наших предположениях уравнение исходной кривой C в плоскости XZ имеет вид

$$x = \psi(z) > 0,$$

то k_1, кривизна нормального сечения в направлении меридиана, совпадает по модулю с кривизной кривой C. Это и заранее можно было предвидеть, так как нормальное сечение в направлении меридиана есть сам меридиан, а любой меридиан поверхности можно рассматривать как повернутую около оси вращения кривую C.

Знак k_1 у нас будет получаться обратный знаку $\ddot{\psi}$, т. е. $+$, если кривая C обращена выпуклостью от оси вращения, и $-$, если она обращена выпуклостью к оси вращения.

Далее, так как $\frac{1}{k_2}$ равно $\psi\sqrt{1+\dot{\psi}^2}$, то из формулы (22) следует, что это есть отрезок нормали кривой C от точки M до оси вращения (отрезок MQ на черт. 113). Интересно заметить, что этот результат уже получен нами в § 38, пример 2, где было доказано, что MQ есть радиус кривизны нормального сечения в направлении параллели.

Вычислим гауссову и среднюю кривизны:

$$K = k_1 k_2 = -\frac{\ddot{\psi}}{\psi(1+\dot{\psi}^2)^2}, \quad 2H = k_1 + k_2 = \frac{1 + \dot{\psi}^2 - \psi\ddot{\psi}}{\psi(1+\dot{\psi}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Если кривая C обращена выпуклостью от оси вращения, т. е. $\ddot{\psi} < 0$, то $K > 0$, и поверхность состоит из эллиптических точек; в противном случае она состоит из точек гиперболических.

2. Отметим один замечательный класс поверхностей отрицательной гауссовой кривизны — *минимальные поверхности*. Так называются поверхности со средней кривизной H, равной нулю во всех точках. Очевидно, это равносильно тому, что главные кривизны k_1 и k_2 отличаются только знаком; формула (412) дает в этом случае $\varphi = \pm\frac{\pi}{4}$, т. е. асимптотические направления суть биссектрисы прямых углов между главными направлениями и, следовательно, ортогональны между собой.

Особое значение минимальных поверхностей связано со следующим фактом. Пусть нам дана поверхность в виде односвязной области, ограниченной замкнутым контуром. Будем менять поверхность, *оставляя неизменным ограничивающий ее контур*. Допустим, что среди всевозможных таких поверхностей (т. е. пленок, натянутых на данный контур) нам удалось найти *поверхность с наименьшей площадью*. Тогда *эта поверхность будет обязательно минимальной*, т. е. с нулевой средней кривизной. Так, мыльная пленка, натянутая на изогнутый в пространстве проволочный контур, принимает форму минимальной поверхности.

Решим теперь задачу: *найти всевозможные минимальные поверхности вращения*.

Потребуем обращения в нуль средней кривизны H, вычисленной в предыдущем примере. Получим

$$1 + \dot{\psi}^2 - \psi\ddot{\psi} = 0,$$

где $x = \psi(z)$ — уравнение кривой C, или

$$\frac{\ddot{\psi}\dot{\psi}}{1+\dot{\psi}^2} = \frac{\dot{\psi}}{\psi}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{2}\{\ln(1+\dot{\psi}^2)\}' = \{\ln\psi\}'.$$

Отсюда, после интегрирования, получаем

$$\psi = a\sqrt{1+\dot{\psi}^2}, \quad a = \text{const},$$

или

$$\frac{\dot{\psi}}{\sqrt{\frac{\psi^2}{a^2}-1}} = 1.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\left\{\ln\left(\frac{\psi}{a} + \sqrt{\frac{\psi^2}{a^2}-1}\right)\right\}' = \frac{1}{a}.$$

Интегрирование дает

$$\ln\left(\frac{\psi}{a} + \sqrt{\frac{\psi^2}{a^2}-1}\right) = \frac{z}{a}, \quad \text{т. е.} \quad \psi(z) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right).$$

Кривая C, вращением которой образована поверхность, есть *цепная линия*, имеющая ось вращения директрисой. При последнем интегрировании мы пренебрегли постоянной, так как она означает лишь параллельное смещение поверхности параллельно оси вращения.

Полученная поверхность называется *катеноидом*; на первый взгляд она по своей форме похожа на однополостный гиперболоид вращения, сильно сплющенный по „вертикальному" направлению.

§ 43. Вычислительные формулы.

В предыдущих параграфах при изучении поверхности предполагались известными коэфициенты первой и второй квадратичных форм и остальные величины выражались посредством них.

Остановимся несколько подробнее на формулах, позволяющих из уравнения поверхности

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \tag{415}$$

находить эти коэфициенты. Для частных производных от $\mathbf{r}$ по параметрам u, v мы получаем следующие выражения, диференцируя (415) почленно:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= x_u\mathbf{i} + y_u\mathbf{j} + z_u\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_v &= x_v\mathbf{i} + y_v\mathbf{j} + z_v\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_{uu} &= x_{uu}\mathbf{i} + y_{uu}\mathbf{j} + z_{uu}\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_{uv} &= x_{uv}\mathbf{i} + y_{uv}\mathbf{j} + z_{uv}\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_{vv} &= x_{vv}\mathbf{i} + y_{vv}\mathbf{j} + z_{vv}\mathbf{k}. \end{aligned}\right\} \tag{416}$$

Записывая теперь скалярные произведения в формулах (342) в развернутом виде, получим развернутые формулы для коэфициентов первой квадратичной формы:

$$\left.\begin{aligned} E &= \mathbf{r}_u^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F &= \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G &= \mathbf{r}_v^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2. \end{aligned}\right\} \tag{417}$$

Перепишем теперь формулы (361), причем запишем смешанные произведения в числителях как определители третьего порядка, пользуясь разложениями (416):

$$L = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{418}$$

Мы выписали довольно громоздкие формулы (417) и (418), чтобы показать, как фактически вычисляются в общем случае коэфициенты основных форм. Исходным пунктом здесь являются функции, выражающие текущие координаты x, y, z на поверхности через криволинейные координаты u, v.

Остановимся на важном частном случае, именно, когда поверхность задана уравнением

$$z = f(x, y). \tag{418'}$$

Здесь можно считать, что две из декартовых координат x, y играют роль криволинейных координат u, v на поверхности, а третья декартова координата z выражена как функция x, y. Нетрудно и радиус-вектор, скользящий концом по поверхности, выразить как функцию от x, y. Действительно,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\,\mathbf{k}. \tag{419}$$

Выведем формулы (416) для этого частного случая параметрического представления поверхности, диференцируя (419) по x и y (x играет роль u, y — роль v):

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}_x &= \mathbf{i} + f_x\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_y &= \mathbf{j} + f_y\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_{xx} &= f_{xx}\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_{xy} &= f_{xy}\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}_{yy} &= f_{yy}\mathbf{k}. \end{aligned}\right\} \tag{420}$$

Вычисляем теперь коэфициенты первой квадратичной формы как скалярные произведения:

$$\left.\begin{aligned} E = \mathbf{r}_x^2 &= 1 + f_x^2, \\ F = \mathbf{r}_x\mathbf{r}_y &= f_x f_y, \\ G = \mathbf{r}_y^2 &= 1 + f_y^2; \end{aligned}\right\} \tag{421}$$

отсюда

$$EG - F^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2. \tag{422}$$

Заметим, что формула (350) для площади куска поверхности принимает теперь вид

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\, dy, \tag{422'}$$

где область изменения переменных x, y совпадает с проекцией данного куска поверхности на плоскость XY [задание поверхности уравнением (418′) означает взаимно однозначное соответствие между точками поверхности и их проекциями на плоскость XY].

Далее, составим векторное произведение

$$[\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y] = [\mathbf{i} + f_x\mathbf{k}, \quad \mathbf{j} + f_y\mathbf{k}] = \mathbf{k} - f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j}.$$

Этот вектор направлен, как мы знаем, по нормали к поверхности, так как первые частные производные радиуса-вектора по параметрам лежат в касательной плоскости. Длину вектора $[\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y]$ легко подсчитать, зная его координаты:

$$|[\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y]| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}.$$

Единичный вектор $\mathbf{m}$ по нормали к поверхности мы получим, разделив вектор $[\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y]$ на его длину:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{k} - f_x\mathbf{i} - f_y\mathbf{j}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \tag{423}$$

Наконец, вычислим коэфициенты второй квадратичной формы как скалярные произведения:

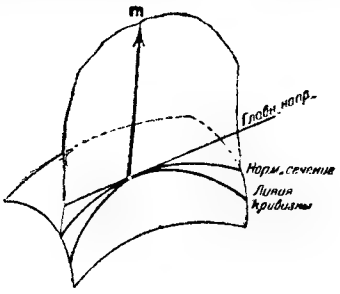
$$\left.\begin{aligned} L &= \mathbf{r}_{xx}\mathbf{m} = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \\ M &= \mathbf{r}_{xy}\mathbf{m} = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \\ N &= \mathbf{r}_{yy}\mathbf{m} = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{424}$$

Интересно еще выражение гауссовой кривизны K:

$$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2}{(1+f_x^2+f_y^2)^2}. \tag{425}$$

§ 44. Линии кривизны.

До сих пор мы рассматривали поверхность лишь в бесконечно малом вблизи какой-нибудь ее точки. Но полученные нами результаты можно связать с построениями, осуществляемыми уже на целом куске поверхности. Сюда принадлежат прежде всего линии кривизны.



Черт. 94.

Линией кривизны на поверхности называется кривая, в каждой точке которой касательная направлена по одному из двух главных направлений в этой точке поверхности (черт. 94).

Пусть уравнения кривой на поверхности будут

$$u = u(t), \quad v = v(t),$$

где t — параметр вдоль кривой. Тогда в любой точке кривой, т. е. при любом значении t, касательная к ней должна итти по главному направлению в этой точке, а для этого необходимо и достаточно, как мы знаем, чтобы du, dv при смещении по кривой были подчинены условию (377)

$$\begin{vmatrix} L\,du+M\,dv & M\,du+N\,dv \\ E\,du+F\,dv & F\,du+G\,dv \end{vmatrix} = 0,$$

или, в развернутом виде,

$$(LF-ME)\,du^2+(LG-NE)\,du\,dv+(MG-NF)\,dv^2=0. \tag{426}$$

Итак, *для того чтобы кривая на поверхности была линией кризизны, необходимо и достаточно, чтобы диференциалы du, dv вдоль нее в любой точке удовлетворяли уравнению* (426), *где L, M, N, E, F, G взяты для этой же точки.*

Разберем подробнее, что дает этот результат для изучения линий кривизны. Так как точки закругления мы попрежнему считаем исключенными, то уравнение (426) нигде не обращается в тождество относительно дифференциалов, т. е. все три коэфициента не обращаются одновременно в нуль.

Допустим, что в уравнении (426) имеется хоть один из квадратов, т. е. хоть один из коэфициентов при du^2, dv^2 отличен от нуля. Пусть, для определенности,

$$LF - ME \neq 0.$$

Тогда, деля левую часть уравнения на dv^2, получаем квадратное уравнение относительно $du : dv$

$$(LF - ME)\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + (LG - NE)\frac{du}{dv} + (MG - NF) = 0. \qquad (426')$$

Решая его, получим, как мы знаем, два действительных различных корня (отвечающих двум взаимно ортогональным главным направлениям в каждой точке)

$$\frac{du}{dv} = f_1(u, v), \quad \frac{du}{dv} = f_2(u, v). \qquad (427)$$

Мы записали полученные корни как функции от u, v на том основании, что коэфициенты квадратного уравнения зависели от u, v через коэфициенты первой и второй квадратичных форм. Формулы (427) характеризуют главные направления в любой точке поверхности. Таким образом уравнение (426) приводит либо к первому, либо ко второму из уравнений (427). Следовательно, вдоль линий кривизны должно иметь место либо первое, либо второе из уравнений (427). В теории диференциальных уравнений доказывается (см. Гурса, т. II, § 388), что через каждую точку x_0, y_0 на плоскости x, y проходит одна и только одна кривая, вдоль которой переменные x, y и их дифференциалы dx, dy удовлетворяют заданному уравнению вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Другими словами, существует функция $y(x)$ (и притом только одна), производная которой $\frac{dy}{dx}$ связана с аргументом x и самой функцией y указанной зависимостью и которая при $x = x_0$ принимает значение y_0. Идея доказательства может быть пояснена подобно тому, как это сделано в сноске в § 33.

Применяя этот результат к уравнениям (427), мы видим, что через каждую точку $M(u, v)$ на нашей поверхности проходит одна линия кривизны, вдоль которой удовлетворяется первое из уравнений (427), и одна, вдоль которой удовлетворяется второе из них. Касательные к линиям кривизны по определению направлены в каждой точке поверхности по двум взаимно ортогональным главным направлениям. Мы получаем два семейства (сеть) линий кривизны. Сеть эта ортогональ-

ная, так как линии кривизны разных семейств встречаются всегда под прямым углом (черт. 95).

Мы оставили в стороне случай, когда в уравнении (426) обращаются тождественно в нуль коэфициенты при обоих квадратах, так что имеют место условия

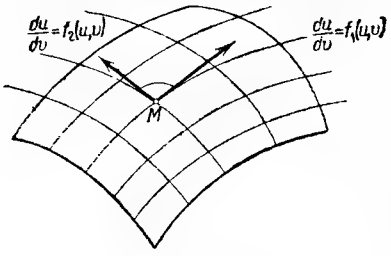
$$LF - ME = 0, \quad MG - NF = 0 \tag{428}$$

и (426) принимает вид

$$(LG - NE)\, du\, dv = 0.$$

Так как все три коэфициента в уравнении (426) не обращаются в нуль одновременно, то $LG - NE \neq 0$, следовательно,

$$\text{или } du = 0, \quad \text{или } dv = 0. \tag{429}$$



Черт. 95.

Таким образом вдоль линий кривизны или $du = 0$, т. е. u постоянное, или $dv = 0$, т. е. v постоянное. Следовательно, мы снова получаем сеть линий кривизны с той особенностью, что она совпадает с координатной сетью. При этом нужно иметь в виду, что координатная сеть зависит от произвольного в принципе выбора криволинейных координат на поверхности, в то время как сеть линий кривизны строится на данной поверхности вполне однозначно, как видно из самого определения линий кривизны.

Поэтому совпадение обеих сетей означает в сущности такой специальный выбор криволинейных координат на поверхности, что координатная сеть совпадает с сетью линий кривизны. Можно было бы показать, что на любой поверхности в достаточно малой окрестности какой-нибудь точки, не являющейся точкой закругления, такой выбор криволинейных координат всегда возможен.

Укажем *необходимый и достаточный признак того, что данная координатная сеть на поверхности совпадает с сетью линий кривизны.*

Этот признак заключается в том, что в соответствующей системе координат u, v средние коэфициенты первой и второй квадратичных форм тождественно обращаются в нуль:

$$F = M = 0. \tag{430}$$

Достаточность. Из условий (430) немедленно следуют условия (428), а следовательно, повторяя прежние рассуждения, получаем, что линии кривизны определяются условием (429) и совпадают с координатными линиями.

Необходимость. Пусть координатные линии суть линии кривизны. Тогда вдоль них должно соблюдаться условие (426), которое вдоль линий u запишется в виде

$$LF - ME = 0,$$

так как вдоль линий u мы имеем $dv=0$, $du\neq 0$. Совершенно аналогично, условие (426) вдоль линий v дает

$$MG-NF=0.$$

Если допустить, что F, M не обращаются одновременно в нуль, то мы имеем здесь два линейных однородных уравнения относительно F, M, совместных между собой. Определитель системы должен быть равен нулю:

$$LG-NE=0.$$

В результате все три коэфициента уравнения (426) обращаются в нуль, что невозможно, так как точки закругления устранены из рассмотрения. Следовательно, необходимо

$$F=M=0.$$

Заметим еще, что в отдельности первое из условий (430) $F=0$, т. е. $\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v=0$, $\mathbf{r}_u\perp\mathbf{r}_v$, выражает *ортогональность* координатной сети, а второе — ее *сопряженность*, т. е. сопряженность направлений координатных линий в каждой точке поверхности. Об этом подробнее см. в следующей главе.

В следующей же главе, после знакомства с развертывающимися поверхностями, будет доказана теорема о нормалях к поверхности вдоль линий кривизны.

Примеры.

1. Линии кривизны на поверхности вращения совпадают с ее меридианами и параллелями, так как главные направления в каждой точке касаются меридиана и параллели (пример 1, § 42).

2. Замечательный способ отыскания линий кривизны дает *теорема Дюпена.*

Допустим, что в пространстве построены три семейства поверхностей, каждое от одного параметра:

$$F_1(x, y, z)=C_1,\quad F_2(x, y, z)=C_2,\quad F_3(x, y, z)=C_3.$$

В некоторой области пространства, где определены функции F_1, F_2, F_3, через каждую точку M проходит по одной поверхности из каждого семейства; *если три плоскости, касательные к этим поверхностям, взаимно ортогональны во всех точках M, то мы говорим, что три семейства поверхностей образуют триортогональную систему.* Такую систему образуют, например, плоскости, проходящие через ось Z, прямые круглые конусы, имеющие осью ось Z, и сферы с центром в начале.

Введем обозначения

$$u_1=F_1(x, y, z),\quad u_2=F_2(x, y, z),\quad u_3=F_3(x, y, z)$$

и выразим из этих уравнений x, y, z, обратно, как функции от u_1, u_2, u_3. Тогда и радиус-вектор любой точки M в рассматриваемой области пространства можно рассматривать как функцию переменных u_1, u_2, u_3:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u_1, u_2, u_3).$$

Положим здесь, например, $u_3=C_3$, где $C_3=\text{const}$; тогда тем самым $F_3(x, y, z)=C_3$, и мы получаем одну из поверхностей третьего семейства (при этом заданную в параметрическом представлении через u_1, u_2).

Поэтому $\mathbf{r}_1$ (вектор с индексом 1, 2 или 3 означает производную от этого вектора соответственно по u_1, u_2 или u_3), равно как и $\mathbf{r}_2$ будут касательными векторами к поверхности третьего семейства. Аналогично $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ касаются поверхности первого семейства, а $\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_1$ — поверхности второго семейства. Итак, $\mathbf{r}_1$ лежит на пересечении плоскостей, касательных к поверхностям второго и третьего семейств, и аналогичное утверждение имеет место для $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$.

В силу взаимной ортогональности касательных плоскостей к поверхностям первого, второго и третьего семейств, векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, направленные по прямым их пересечения, тоже взаимно ортогональны, так что мы имеем в любой точке

$$\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = 0, \quad \mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 = 0, \quad \mathbf{r}_3\mathbf{r}_1 = 0.$$

Диференцируя первое уравнение по u_3, второе — по u_1 и третье — по u_2, получим

$$\mathbf{r}_{13}\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1\mathbf{r}_{23} = 0, \quad \mathbf{r}_{21}\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2\mathbf{r}_{31} = 0, \quad \mathbf{r}_{32}\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3\mathbf{r}_{12} = 0;$$

здесь $\mathbf{r}_{13} = \mathbf{r}_{31} = \dfrac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u_1\, \partial u_3}$, и т. д. Складывая два первых уравнения и вычитая третье, получаем $\mathbf{r}_2\mathbf{r}_{31} = 0$, и аналогично $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_{23} = 0$, $\mathbf{r}_3\mathbf{r}_{12} = 0$.

Рассмотрим, для определенности, поверхность третьего семейства

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, u_2, u_3), \quad \text{где} \quad u_3 = C_3.$$

Так как $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ касаются этой поверхности, то перпендикулярный к ним вектор $\mathbf{r}_3$ направлен по нормали $\mathbf{n}$ к поверхности.

Вычислим средний коэфициент второй квадратичной формы

$$M = \mathbf{n}\mathbf{r}_{uv}.$$

Так как вектор $\mathbf{n}$ параллелен $\mathbf{r}_3$, а $\mathbf{r}_{uv}$ есть в нашем случае $\mathbf{r}_{12}$, то

$$M = 0,$$

ибо у нас $\mathbf{r}_{12}\mathbf{r}_3 = 0$, т. е. $\mathbf{r}_3 \perp \mathbf{r}_{12}$.

Точно так же средний коэфициент первой квадратичной формы равен нулю:

$$F = \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = 0.$$

Итак, $M = F = 0$, следовательно, координатная сеть u_1, u_2 на нашей поверхности есть сеть линий кривизны. Но эта координатная сеть получается так: на поверхности $u_3 = C_3$, т. е. $F_3(x, y, z) = C_3$ мы полагаем либо $u_1 = \text{const}$, т. е. $F_1(x, y, z) = \text{const}$, либо $u_2 = \text{const}$, т. е. $F_2(x, y, z) = \text{const}$. Другими словами, поверхность третьего семейства мы пересекаем со всевозможными поверхностями первого и второго семейств.

Окончательно получаем следующий результат: *линии, по которым поверхности какого-нибудь одного семейства триортогональной системы пересекаются с поверхностями двух других семейств, суть линии кривизны.* В этом и состоит *теорема Дюпена.*

3. *Применим теорему Дюпена к отысканию линий кривизны на центральных поверхностях второго порядка.*

Пусть дана поверхность

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1,$$

где, для определенности, $A < B < C$.

Включим эту поверхность в триортогональную систему поверхностей второго порядка, которую построим следующим образом.

Первое семейство:

$$\frac{x^2}{A - C_1} + \frac{y^2}{B - C_1} + \frac{z^2}{C - C_1} = 1,$$

где параметр семейства C_1 меняется в пределах

$$-\infty < C_1 < A;$$

семейство состоит из эллипсоидов.

Второе семейство:

$$\frac{x^2}{A-C_2}+\frac{y^2}{B-C_2}+\frac{z^2}{C-C_2}=1,$$

где

$$A<C_2<B.$$

состоит из однополостных гиперболоидов.

Третье семейство:

$$\frac{x^2}{A-C_3}+\frac{y^2}{B-C_3}+\frac{z^2}{C-C_3}=1,$$

где

$$B<C_3<C,$$

состоит из двуполостных гиперболоидов.

Можно показать, что через каждую точку пространства x, y, z, не лежащую на координатных плоскостях, проходит одна и только одна поверхность из каждого семейства. Докажем, что нормали к этим трем поверхностям в каждой данной точке взаимно ортогональны (т. е. что мы получили действительно триортогональную систему).

Возьмем вектор-градиент от левой части первого и от левой части второго уравнения:

$$\nabla F_1=\frac{2x}{A-C_1}\,\mathbf{i}+\frac{2y}{B-C_1}\,\mathbf{j}+\frac{2z}{C-C_1}\,\mathbf{k};$$

$$\nabla F_2=\frac{2x}{A-C_2}\,\mathbf{i}+\frac{2y}{B-C_2}\,\mathbf{j}+\frac{2z}{C-C_2}\,\mathbf{k}.$$

Составив скалярное произведение этих двух векторов, мы легко убеждаемся, что полученное выражение равно нулю. Для этого достаточно из уравнения первой поверхности вычесть почленно уравнение второй поверхности (оба они удовлетворяются в рассматриваемой точке). Получим

$$(C_2-C_1)\left\{\frac{x^2}{(A-C_1)(A-C_2)}+\frac{y^2}{(B-C_1)(B-C_2)}+\frac{z^2}{(C-C_1)(C-C_2)}\right\}=0.$$

Левая часть здесь лишь неравным нулю множителем отличается от скалярного произведения $\nabla F_1\,\nabla F_2$, и требуемое доказано. Так же можно доказать равенства $\nabla F_1\,\nabla F_3=0$, $\nabla F_2\,\nabla F_3=0$.

Построив таким образом триортогональную систему, *можно найти линии кривизны на каждой из поверхностей системы* (в частности, на исходной поверхности), *пересекая эту поверхность с не включающими ее двумя семействами поверхностей*. Если, например, A, B, C были положительны, следовательно, исходная поверхность — эллипсоид, то линии кривизны получатся: одно семейство — в пересечении с однополостными, другое — с двуполостными гиперболоидами триортогональной системы.

§ 45. Асимптотические линии.

Мы уже знаем, что *асимптотическим направлением* в данной точке поверхности называется направление, касательное к нормальному сечению с кривизной нуль в этой точке. Выпишем общую формулу (372′) для кривизны нормального сечения

$$\widetilde{k}=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}.$$

Для обращения $\tilde{k}$ в нуль необходимо и достаточно обращение в нуль числителя дроби. Следовательно, условие

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0, \tag{431}$$

наложенное на дифференциалы du, dv при смещении из данной точки по некоторому нормальному сечению, необходимо и достаточно для обращения $\tilde{k}$ в нуль, а следовательно, для того чтобы касательная к этому нормальному сечению шла по асимптотическому направлению.

Но соблюдение условия (431) для нормального сечения равносильно соблюдению его для всех кривых с той же касательной в данной точке, потому что кривым с общей касательной отвечают одинаковые значения $du:dv$, а условие (431) наложено по существу на отношение $du:dv$ [в силу однородности (431) относительно du, dv]. Поэтому соблюдение условия (431) в данной точке для du, dv, взятых вдоль какой-нибудь кривой, равносильно соблюдению его для нормального сечения с той же касательной, а следовательно, равносильно тому, что эта касательная идет по асимптотическому направлению.

Кривая на поверхности, касательная к которой в каждой точке направлена по асимптотическому направлению в этой точке, называется асимптотической линией.

В силу только что сказанного, для того чтобы кривая на поверхности была асимптотической линией, необходимо и достаточно, чтобы вдоль нее *в каждой точке* соблюдалось условие (431)

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0.$$

Здесь du, dv — диференциалы текущих координат вдоль асимптотической линии, а L, M, N — функции этих координат.

Разберем в отдельности возможные три случая поведения асимптотических линий.

1. Поверхность состоит из эллиптических точек.

$$K > 0, \quad LN - M^2 > 0. \tag{432}$$

В таком случае условие (431) невыполнимо ни при каких du, dv, так как вторая квадратичная форма, стоящая в левой части (431), существенно положительна, если $L > 0$, и отрицательна, если $L < 0$. Действительно,

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = \frac{1}{L}\{(L\,du + M\,dv)^2 + (LN - M^2)\,dv^2\},$$

и так как выражение в фигурной скобке заведомо положительно, то вторая квадратичная форма при любых du, dv имеет знак L и в нуль обращаться не может; заметим, что L не может обращаться в нуль в силу того же условия (432).

Следовательно, в этом случае на поверхности не существует асимптотических линий. Впрочем мы уже видели, что в эллиптической точке ни одно из нормальных сечений не имеет кривизны $\tilde{k} = 0$.

2. Поверхность состоит из гиперболических точек.

$$K<0, \quad LN-M^2<0. \tag{433}$$

В этом случае асимптотические линии существуют и образуют сеть на поверхности. Действительно, пусть во второй квадратичной форме отличен от нуля хоть один из коэфициентов при квадратах. Пусть, для определенности,

$$L \neq 0$$

на рассматриваемом куске поверхности. Тогда после деления левой части условия (431) на dv^2 это условие можно записать в виде квадратного уравнения

$$L\left(\frac{du}{dv}\right)^2+2M\frac{du}{dv}+N=0,$$

решая которое, получим два корня

$$\frac{du}{dv}=-\frac{M}{L}+\frac{\sqrt{M^2-LN}}{L} \quad \text{и} \quad \frac{du}{dv}=-\frac{M}{L}-\frac{\sqrt{M^2-LN}}{L}.$$

Вследствие (433) под радикалом стоит положительная величина. Учитывая, что вместе с L, M, N правые части уравнений являются функциями от u, v, и обозначая эти функции через φ_1 и φ_2, получим, что асимптотические линии характеризуются тем, что вдоль них

$$\frac{du}{dv}=\varphi_1(u, v) \quad \text{или} \quad \frac{du}{dv}=\varphi_2(u, v). \tag{434}$$

Повторяя рассуждения, примененные нами к линиям кривизны, мы заключаем, что через каждую точку поверхности проходит одна и только одна асимптотическая линия, вдоль которой соблюдается первое из уравнений (434), и одна и только одна, — вдоль которой соблюдается второе из этих уравнений. Касательные к этим линиям в данной точке образуют асимптотические направления; мы еще раньше видели, что в гиперболической точке таких направлений будет два.

Таким образом асимптотические линии образуют на поверхности два семейства, так называемую *асимптотическую сеть*.

Если обращаются тождественно в нуль оба коэфициента при квадратах во второй квадратичной форме, т. е. если $L=N=0$, то условие (431) принимает вид

$$2M\,du\,dv=0.$$

Если бы M тоже обращалось в какой-нибудь точке в нуль, то в этой точке мы имели бы частный случай точки закругления, когда $\widetilde{k}$ по всем направлениям равно нулю [см. (378)]. Но точки закругления исключены из рассмотрения, так что $M \neq 0$, и из предыдущего уравнения следует, что вдоль асимптотических линий

$$du=0 \quad \text{или} \quad dv=0. \tag{435}$$

Таким образом в этом случае снова имеем два семейства асимптотических линий, причем одно из них совпадает с семейством координатных линий u, а второе — с семейством координатных линий v.

Асимптотическая сеть однозначно определяется на поверхности, выбор же координатной сети произволен. Можно показать, что в достаточно малой окрестности гиперболической точки поверхности всегда можно так выбрать систему криволинейных координат, что координатная сеть совпадает с асимптотической.

Необходимым и достаточным признаком того, что выбранная на поверхности координатная сеть совпадает с асимптотической, является тождественное обращение в нуль коэфициентов при квадратах во второй квадратичной форме:

$$L = N = 0. \tag{436}$$

Достаточность этого условия только что была доказана. Что же касается его необходимости, то, если координатные линии являются асимптотическими, то вдоль них должно соблюдаться условие (431). Но вдоль линии u

$$du \neq 0, \quad dv = 0,$$

так что (431) принимает вид $L = 0$. Совершенно аналогично получаем $N = 0$, используя условие (431) вдоль линии v.

Докажем теперь интересное характеристическое свойство асимптотических линий.

Для того чтобы линия на поверхности была асимптотической, необходимо и достаточно, чтобы она или была прямой, или имела в каждой точке касательную плоскость к поверхности своей соприкасающейся плоскостью.

Выпишем основную формулу (365), имеющую место для любой кривой на поверхности:

$$k \cos \theta = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Для того чтобы линия на поверхности была асимптотической, необходимо и достаточно соблюдение вдоль нее условия (431), т. е. обращение в нуль правой части этого уравнений, а следовательно, и левой его части:

$$k \cos \theta = 0. \tag{437}$$

Но здесь представляются две возможности: или

$$k = 0,$$

т. е. кривизна линии тождественно равна нулю, и, значит, линия прямая; или в точках, где кривизна отлична от нуля,

$$\cos \theta = 0,$$

т. е. угол θ между нормалью $\mathbf{m}$ к поверхности и главной нормалью $\mathbf{n}$ к кривой равен 90°. В этом случае вектор $\mathbf{n}$ перпендикулярен к $\mathbf{m}$ и

лежит, следовательно, в касательной плоскости к поверхности. Так как касательный вектор $\mathbf{t}$ всегда лежит в касательной плоскости к поверхности, то эта плоскость содержит оба вектора $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ и совпадает, следовательно, с соприкасающейся плоскостью к кривой. Теорема доказана.

В заключение докажем *теорему Бельтрами-Эннепера о кручении асимптотических линий* [1]). Заметим, прежде всего, что единичный вектор по нормали к поверхности, будучи перпендикулярен соприкасающейся плоскости к асимптотической линии, направлен по бинормали к ней. Поэтому вдоль асимптотической линии $\mathbf{m}$ совпадает с единичным вектором $\mathbf{b}$ по бинормали или отличается от него знаком:

$$\mathbf{b} = \pm \mathbf{m}. \tag{438}$$

Вспомним затем третью формулу Френе

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\varkappa \mathbf{n}.$$

Умножая скалярно обе части на $\mathbf{n}$ и учитывая, что $\mathbf{n}^2 = 1$, получим

$$\mathbf{n}\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\varkappa.$$

Так как $\mathbf{n} = -[\mathbf{t}, \mathbf{b}]$ [см. (260″)], то последнюю формулу можно переписать в виде

$$-[\mathbf{t}, \mathbf{b}]\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\varkappa$$

или

$$\varkappa = \left(\mathbf{t}\mathbf{b}\frac{d\mathbf{b}}{ds}\right), \tag{439}$$

где в правой части стоит смешанное произведение трех векторов. Полученная формула верна для любой пространственной кривой. Применим теперь ее для асимптотической линии на поверхности. Учитывая, что вдоль этой линии соблюдается равенство (438), и вставляя в формулу (439) $\pm\mathbf{m}$ вместо $\mathbf{b}$, получим

$$\varkappa = \left(\mathbf{t}\mathbf{m}\frac{d\mathbf{m}}{ds}\right). \tag{440}$$

Здесь вектор $\mathbf{m}$ рассматривается вдоль асимптотической линии как функция дуги s.

Преобразуем теперь полученное выражение для кручения асимптотической линии. Выпишем для асимптотической линии в какой-нибудь ее точке формулы (401) и (402):

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{t} &= \cos\varphi \cdot \mathbf{t}_1 + \sin\varphi \cdot \mathbf{t}_2, \\ \frac{d\mathbf{m}}{ds} &= -k_1 \cos\varphi \cdot \mathbf{t}_1 - k_2 \sin\varphi \cdot \mathbf{t}_2. \end{aligned}\right\} \tag{441}$$

---

[1]) Может быть опущена без ущерба для понимания дальнейшего.

Здесь $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ — единичные векторы по главным направлениям в данной точке, φ — угол, образуемый вектором $\mathbf{t}$ с $\mathbf{t}_1$. Но так как $\mathbf{t}$ касается асимптотической линии, то он идет по асимптотическому направлению в данной точке, и угол φ удовлетворяет, следовательно, условию (412)

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}. \tag{442}$$

Теперь остается вставить выражения (441) в формулу (440). Получим

$$\varkappa = [\cos\varphi\cdot\mathbf{t}_1 + \sin\varphi\cdot\mathbf{t}_2, \mathbf{m}]\,(-k_1\cos\varphi\cdot\mathbf{t}_1 - k_2\sin\varphi\cdot\mathbf{t}_2).$$

Раскрывая скобки в векторном произведении, учитываем, что $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{t}_2$ — единичные взаимно ортогональные векторы и, следовательно, при подходящей нумерации $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$ можно считать

$$[\mathbf{t}_1, \mathbf{m}] = \mathbf{t}_2, \quad [\mathbf{t}_2, \mathbf{m}] = -\mathbf{t}_1.$$

Получим

$$\varkappa = (\cos\varphi\cdot\mathbf{t}_2 - \sin\varphi\cdot\mathbf{t}_1)(-k_1\cos\varphi\cdot\mathbf{t}_1 - k_2\sin\varphi\cdot\mathbf{t}_2).$$

Раскрывая, наконец, скобки в этом скалярном произведении, приходим к формуле

$$\varkappa = \cos\varphi\sin\varphi\cdot(k_1 - k_2) = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}(k_1 - k_2),$$

так как $\mathbf{t}_1^2 = \mathbf{t}_2^2 = 1$, $\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2 = 0$. Но для асимптотической линии угол φ удовлетворяет условию (442), причем знак $\pm$ в правой части (442) характеризует, по какому из двух асимптотических направлений в данной точке идет наша асимптотическая линия.

Вставляя в выражение для $\varkappa$ значение $\operatorname{tg}\varphi$, получаем

$$\varkappa = \pm\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}\cdot\frac{k_1 - k_2}{1 - \frac{k_1}{k_2}} = \mp\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}\,k_2.$$

Мы видим, что *кручения асимптотических линий, проходящих через данную точку по двум асимптотическим направлениям, отличаются только знаком.* Что же касается модуля кручения $\varkappa$, то, возводя $\varkappa$ в квадрат, получаем из предыдущей формулы

$$\varkappa^2 = -k_1k_2 = -K$$

или

$$\varkappa = \pm\sqrt{-K}. \tag{443}$$

Итак, *модуль кручения асимптотической линии равен корню квадратному из взятой с обратным знаком гауссовой кривизны в рассматриваемой точке поверхности.* Напомним, что сейчас мы рассматриваем поверхность, состоящую из гиперболических точек, так что $-K$ величина положительная. Два подчеркнутые предложения составляют содержание теоремы Бельтрами-Эннепера, которая, таким образом, доказана.

3. Поверхность состоит из параболических точек.

$$K = 0, \quad LN - M^2 = 0. \tag{444}$$

В этом случае L и N не могут обращаться в нуль одновременно, так как тогда M также обратилось бы в нуль, и мы имели бы частный случай точки закругления, когда все $\widetilde{k}$ равны нулю. Пусть, для определенности, $L \neq 0$.

Деля, как и в предыдущем случае, левую часть уравнения (431) на dv^2, приходим к квадратному уравнению относительно $\frac{du}{dv}$

$$L\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2M\frac{du}{dv} + N = 0,$$

которое в силу (444) имеет теперь лишь один корень

$$\frac{du}{dv} = -\frac{M}{L}. \tag{445}$$

Правая часть этого равенства есть функция от u, v. Ссылаясь на ту же теорему анализа, что и в предыдущих случаях, можно утверждать, что через каждую точку поверхности проходит одна и только одна кривая, вдоль которой соблюдается уравнение (445), т. е. одна и только одна асимптотическая линия [действительно, в рассматриваемом случае условие (431) оказалось эквивалентным равенству (445)]. На поверхности имеется одно семейство асимптотических линий. Это связано с ранее полученным результатом (§ 42), что в параболической точке имеется лишь одно асимптотическое направление и это асимптотическое направление совпадает с тем из двух главных направлений, которому отвечает главная кривизна нуль. Поэтому *для поверхности, состоящей из параболических точек, асимптотические линии суть в то же время и линии кривизны*; они образуют одно из двух семейств линий кривизны и будут, как мы убедимся впоследствии (§ 51), обязательно прямыми линиями.

Примеры.

1. *Асимптотические линии на поверхности вращения* (см. пример 1, § 42). Составим диференциальное уравнение асимптотнческих линий

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0,$$

которое в нашем случае примет вид

$$\frac{-\psi''du^2 + \psi dv^2}{\sqrt{1+\psi'^2}} = 0$$

(параметр u совпадает с z). Отсюда

$$dv = \pm\sqrt{\frac{\psi''}{\psi}}\,du, \quad v = \pm\int\sqrt{\frac{\psi''(u)}{\psi(u)}}\,du + C.$$

Отыскание асимптотических линий сводится к квадратуре, причем интеграл вещественный, если $\psi'' > 0$, т. е. если $K < 0$. Произвольная постоянная C означает, что, найдя одну асимптотическую, мы можем ее повернуть вокруг оси Z на произвольный угол C (все значения угла v вдоль кривой изменятся при этом на C), причем она остается асимптотической на той же поверхности.

2. *Асимптотические линии на катеноиде.* В этом случае (пример 2, § 42) $\psi = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right)$, следовательно, $\psi'' = \frac{1}{a^2}\psi$.

Дифференциальное уравнение асимптотических линий есть $dv = \pm\frac{du}{a}$, откуда $u = av + C$ (первое семейство) или $u = -av + C$ (второе семейство).

Таким образом, асимптотические линии катеноида обвиваются вокруг него, напоминая винтовые линии, причем приращения v и u пропорциональны. Другими словами, u, „подъем в вертикальном направлении" (у нас $u = z$, см. пример 1, § 42), растет пропорционально v, углу обхода вокруг оси вращения (для второго семейства нужно говорить о „спуске в вертикальном направлении").

Так как катеноид — минимальная поверхность, то асимптотические линии идут под углами в 45° к линиям кривизны, т. е. меридианам и параллелям катеноида.

§ 46. Третья основная квадратичная форма и сферическое отображение поверхности.

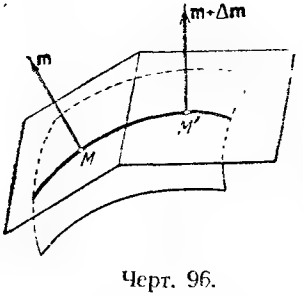
Когда мы движемся по какой-нибудь кривой на поверхности, отнесенной для простоты к дуге как к параметру: $u = u(s)$, $v = v(s)$, то единичный вектор $\mathbf{m}$ по нормали к поверхности, являющийся функцией от u, v, можно рассматривать вдоль этой кривой также как функцию от s:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}\{u(s), v(s)\}.$$

Как мы знаем из второй леммы § 28, скорость вращения единичного вектора $\mathbf{m}$ по отношению к пути, проходимому по кривой, выражается формулой

$$\lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\mathbf{m}}{ds}\right|;$$

здесь $\Delta\varphi$ — угол между нормалями $\mathbf{m}$ в бесконечно близких точках кривой M и M', Δs — длина дуги MM', а $\frac{d\mathbf{m}}{ds}$ — производная $\mathbf{m}$ по s, взятая в точке M, к которой стремится M' (черт. 96). Эту же формулу можно записать немного иначе:



Черт. 96.

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\mathbf{m}}{ds}\right| + \varepsilon,$$

где ε бесконечно мало вместе с Δs. Так как аргументом у нас служит s, то $ds = \Delta s$ и, умножая обе части равенства на $|ds|$, получим

$$\Delta\varphi = |d\mathbf{m}| + \ldots, \qquad (446)$$

где точками обозначены бесконечно малые высшего порядка. Обозначая главную часть угла $\Delta\varphi$ через $d\varphi$, можно записать

$$d\varphi = |d\mathbf{m}|. \qquad (447)$$

Так как угол $\Delta\varphi$ между нормалями в точках M и M' численно равен двухгранному углу между касательными плоскостями в этих же точках, то можно сказать, что *угол поворота касательной плоскости при смещении из точки M в бесконечно близкую точку M' равен (если взять его главную часть $d\varphi$) модулю дифференциала $d\mathbf{m}$, отвечающего этому же смещению.*

Так как $d\varphi$ есть модуль вектора $d\mathbf{m}$, то квадрат $d\varphi$ равен скалярному квадрату этого вектора:

$$d\varphi^2 = d\mathbf{m}^2. \tag{448}$$

Так как при смещении по поверхности

$$d\mathbf{m} = \mathbf{m}_u\, du + \mathbf{m}_v\, dv,$$

то, возводя $d\mathbf{m}$ в скалярный квадрат и вводя обозначения

$$\mathbf{m}_u^2 = e(u, v),\ \mathbf{m}_u\mathbf{m}_v = f(u, v),\ \mathbf{m}_v^2 = g(u, v), \tag{449}$$

получим

$$d\varphi^2 = e\, du^2 + 2f\, du\, dv + g\, dv^2. \tag{450}$$

Мы получили в правой части квадратичную форму относительно du, dv; коэфициенты ее суть функции координат u, v. Эта квадратичная форма называется *третьей основной квадратичной формой на поверхности.* Интересно сопоставить все три квадратичные формы:

$$\text{Первая } ds^2 = d\mathbf{r}^2,$$

$$\text{Вторая } l = -d\mathbf{r}\, d\mathbf{m},$$

$$\text{Третья } d\varphi^2 = d\mathbf{m}^2.$$

Таким образом первая и третья формы отличаются тем, что векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{m}$ меняются ролями; вторая же форма занимает промежуточное положение между ними. Этому соответствует и геометрический смысл основных форм. А именно, если во всех случаях иметь в виду главные части соответствующих бесконечно малых величин, то можно сказать, что основные формы выражают нам:

Первая — квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками на поверхности.

Вторая — расстояние от одной из этих точек до касательной плоскости в другой точке.

Третья — квадрат угла между касательными плоскостями в этих точках.

Третья квадратичная форма играет меньшую роль в теории поверхностей, чем первые две, что в значительной мере объясняется следующей причиной.

Третья форма может быть алгебраически получена из первых двух при помощи изящной формулы, которую мы сейчас выведем. Пусть бесконечно малому смещению из точки M отвечают диференциалы

координат du, dv; тогда, как мы знаем из формул (401) и (402), при том же смещении

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \cos\varphi \cdot \mathbf{t}_1 + \sin\varphi \cdot \mathbf{t}_2,$$

$$\frac{d\mathbf{m}}{ds} = -k_1 \cos\varphi \cdot \mathbf{t}_1 - k_2 \sin\varphi \cdot \mathbf{t}_2, \tag{451}$$

где $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ — единичные взаимно ортогональные векторы по главным направлениям. Умножая первую формулу на k_1 и складывая со второй, получим

$$\frac{d\mathbf{m}}{ds} + k_1 \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \sin\varphi \cdot (k_1 - k_2) \cdot \mathbf{t}_2$$

или, умножая на ds,

$$d\mathbf{m} + k_1 d\mathbf{r} = \sin\varphi \cdot (k_1 - k_2)\, ds \cdot \mathbf{t}_2.$$

Мы видим, что вектор $d\mathbf{m} + k_1 d\mathbf{r}$ лишь скалярным множителем отличается от $\mathbf{t}_2$ и, следовательно, ему параллелен:

$$d\mathbf{m} + k_1 d\mathbf{r} \parallel \mathbf{t}_2.$$

Совершенно аналогично, умножая первое из равенств (451) на k_2 и складывая со вторым, убеждаемся, что

$$d\mathbf{m} + k_2 d\mathbf{r} \parallel \mathbf{t}_1.$$

Поскольку векторы $d\mathbf{m} + k_1 d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{m} + k_2 d\mathbf{r}$ параллельны векторам $\mathbf{t}_2$ и $\mathbf{t}_1$, между собой взаимно ортогональным, то они и сами ортогональны между собой, и их скалярное произведение равно нулю:

$$(d\mathbf{m} + k_1 d\mathbf{r})(d\mathbf{m} + k_2 d\mathbf{r}) = 0.$$

Раскроем скобки:

$$d\mathbf{m}^2 + (k_1 + k_2)\, d\mathbf{m}\, d\mathbf{r} + k_1 k_2 d\mathbf{r}^2 = 0.$$

Но $k_1 + k_2$ есть удвоенная средняя кривизна, т. е. $2H$, а $k_1 k_2$ есть гауссова кривизна K, следовательно, эта формула перепишется окончательно в виде

$$\mathrm{III} - 2H \cdot \mathrm{II} + K \cdot \mathrm{I} = 0. \tag{452}$$

Здесь через III коротко обозначена третья квадратичная форма $d\mathbf{m}^2$, через II — вторая форма $-d\mathbf{r}\, d\mathbf{m}$ и через I — первая форма $d\mathbf{r}^2$. Так как K и H выражаются, как мы знаем, через коэфициенты первой и второй форм, то формула (452) позволяет выразить третью форму целиком через первые две, и притом чисто алгебраическим путем.

Третьей квадратичной форме можно придать весьма наглядное истолкование, если воспользоваться геометрическим построением, которое называется *сферическим отображением поверхности* и бывает полезным во многих случаях. А именно, будем откладывать единичный нормальный вектор $\mathbf{m}$, который вдоль поверхности является функцией криволинейных координат u, v,

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(u, v), \tag{453}$$

из одной и той же точки O при любых значениях u, v. Так как вектор $\mathbf{m}$ единичный, то при переменных u, v конец его будет двигаться по сфере радиуса, равного 1, с центром в O. Каждой точке u, v на нашей поверхности будет отвечать точка единичной сферы с радиусом-вектором $\mathbf{m}(u, v)$. Рассматриваемая область на поверхности однозначно отобразится на соответствующую область единичной сферы, для которой уравнение (453) можно рассматривать как параметрическое представление: $\mathbf{m}$ — как радиус-вектор, а u и v — как параметры [1]).

Двигаясь по какой-нибудь кривой на поверхности, мы описываем соответствующую кривую на единичной сфере, вдоль которой $d\mathbf{m}$ будет дифференциалом радиуса-вектора и, следовательно, квадрат дифференциала дуги будет выражаться формулой

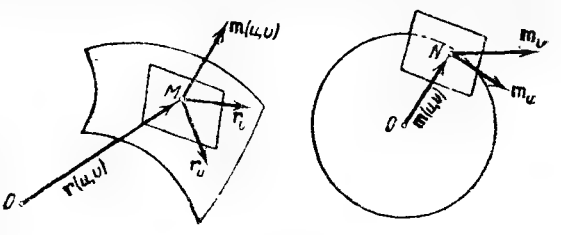
$$ds^{*2} = d\mathbf{m}^2 = \text{III}.$$

Таким образом, *при сферическом отображении поверхности третья квадратичная форма на ней превращается в первую квадратичную форму на единичной сфере.*

Разумеется, при этом предполагается, что параметрам u, v приписываются на поверхности и на сфере одинаковые значения в соответствующих точках, как это и было осуществлено в только что проведенном построении.

Выведем теперь одну вспомогательную формулу, которая позволит нам получить интересное геометрическое истолкование гауссовой кривизны K при помощи сферического отображения поверхности.

Пусть N — точка, отвечающая в сферическом отображении точке M на поверхности (черт. 97). Вектор $\mathbf{m}$ служит единичной нормалью не только для поверхности в точке M, но и для сферы в точке N. Действительно, $\mathbf{m}$ является радиусом-вектором точки N, а так как радиус сферы, проведенный в какую-нибудь точку на ней, перпендикулярен к касательной плоскости, то вектор направлен по нормали к сфере в точке N. Таким образом поверхность и сфера имеют в соответственных точках M, N параллельные касательные плоскости. В этих плоскостях, перпендикулярных вектору $\mathbf{m}$, располагаются частные производные от радиуса-вектора по параметрам: для поверхности $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$, для сферы $\mathbf{m}_u$, $\mathbf{m}_v$. Составим векторные произведения $[\mathbf{m}_u, \mathbf{m}_v]$ и $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$; они направлены, каждое, перпендикулярно



Черт. 97.

[1]) Мы предполагаем, что гауссова кривизна поверхности K отлична от нуля. Немного ниже показано, что в этом случае u, v действительно способны служить криволинейными координатами на сфере. Случай же тождественного обращения K в нуль приводит к вырождению отображения: поверхность отображается в л и н и ю на сфере (см. § 51).

соответствующей касательной плоскости и, следовательно, параллельно вектору $\mathbf{m}$. Будучи коллинеарными, эти векторные произведения отличаются лишь скалярным множителем:

$$[\mathbf{m}_u, \mathbf{m}_v] = a\,[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]. \tag{454}$$

Неопределенный пока множитель a нетрудно подсчитать. Умножим скалярно обе части равенства на векторное произведение $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$. Применяя известную из векторной алгебры формулу для скалярного произведения двух векторных произведений

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\,[\mathbf{c}, \mathbf{d}] = \begin{vmatrix} \mathbf{ac} & \mathbf{ad} \\ \mathbf{bc} & \mathbf{bd} \end{vmatrix},$$

получим

$$\begin{vmatrix} \mathbf{r}_u\mathbf{m}_u & \mathbf{r}_u\mathbf{m}_v \\ \mathbf{r}_v\mathbf{m}_u & \mathbf{r}_v\mathbf{m}_v \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} \mathbf{r}_u\mathbf{r}_u & \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_v\mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v\mathbf{r}_v \end{vmatrix}.$$

В определителе левой части стоят скалярные произведения, отличающиеся лишь знаком от коэфициентов второй квадратичной формы [см. (382)]; справа же скалярные произведения в определителе совпадают с коэфициентами первой квадратичной формы [см. (342)]. В результате равенство можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} -L & -M \\ -M & -N \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}$$

или

$$a = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Но, согласно (408), это выражение совпадает с гауссовой кривизной K, так что окончательный вид формулы (454) будет

$$[\mathbf{m}_u, \mathbf{m}_v] = K\,[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]. \tag{455}$$

Эту формулу мы и хотели вывести. Теперь уясним себе ее геометрический смысл. Мы ограничиваемся случаем, когда

$$K \neq 0. \tag{456}$$

Тогда прежде всего $\mathbf{m}_u$ и $\mathbf{m}_v$ неколлинеарны. Действительно, по нашим предположениям $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ неколлинеарны, т. е. $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ отлично от нуля, а следовательно, и $[\mathbf{m}_u, \mathbf{m}_v]$ отлично от нуля, как видно из (455). Итак, $\mathbf{m}_u$ и $\mathbf{m}_v$ неколлинеарны.

Соблюдение этого условия для вектора $\mathbf{m}(u, v)$ как для радиуса-вектора единичной сферы означает, что параметры u, v в достаточной близости каждой данной точки действительно способны играть роль криволинейных координат и на этой сфере (взаимная однозначность соответствия, см. § 34). В дальнейшем мы предполагаем, что в рассматриваемой области изменения u, v это имеет место.

Беря обе части равенства (455) по модулю, получим

$$|[\mathbf{m}_u, \mathbf{m}_v]| = |K|\,|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|. \tag{457}$$

Модуль векторного произведения $|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|$, как мы знаем из формулы (347), равен корню квадратному из дискриминанта первой квадратичной формы:

$$|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Применяя эту же формулу к единичной сфере, для которой радиусом-вектором служит $\mathbf{m}(u, v)$, а первой квадратичной формой — третья квадратичная форма на исходной поверхности, получим

$$|[\mathbf{m}_u, \mathbf{m}_v]| = \sqrt{eg - f^2}.$$

Теперь (457) примет вид

$$\sqrt{eg - f^2} = |K| \sqrt{EG - F^2}. \tag{458}$$

Рассмотрим некоторую область изменения параметров u, v. Ей будет отвечать определенная область D на исходной поверхности и одновременно область D^* на сфере, в которую D переходит при сферическом отображении. Вычислим площадь σ^* области D^*, пользуясь формулой (350) применительно к поверхности сферы. Так как коэфициенты первой квадратичной формы для сферы обозначены нами через e, f, g, то формула (350) дает

$$\sigma^* = \iint \sqrt{eg - f^2}\, du\, dv,$$

где двойной интеграл распространен по соответствующей области изменения параметров u, v. Пользуясь формулой (458), выражение для σ^* можно переписать в виде

$$\sigma^* = \iint |K| \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \tag{459}$$

С другой стороны, как видно из той же формулы (350) уже в применении к исходной поверхности, площадь σ области D на исходной поверхности выражается интегралом

$$\sigma = \iint \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \tag{460}$$

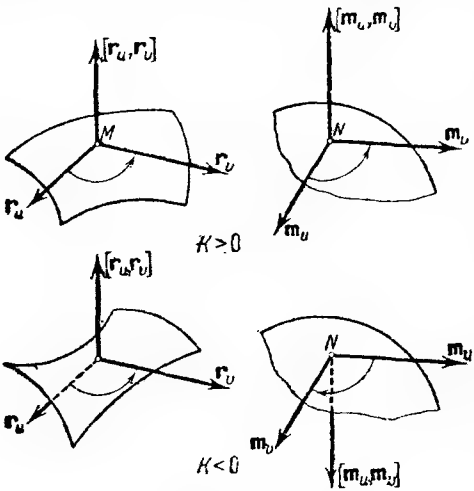
по той же области изменения параметров u, v.

Допустим теперь, что область D на поверхности неограниченно уменьшается, стягиваясь в точку M. Тогда соответствующая область D^* на сфере также неограниченно уменьшается, стягиваясь в точку N. Тогда, как следует из основных свойств кратных интегралов, отношение интегралов (459) и (460) стремится к пределу, равному отношению подинтегральных выражений в той точке, к которой стягивается область

интегрирования. Так как это последнее отношение равно в нашем случае $|K|$ в точке M, то можно написать

$$\frac{\sigma^*}{\sigma} \to |K|. \tag{461}$$

Мы получили интересное истолкование модуля гауссовой кривизны поверхности в данной точке M как *предела отношения площади* σ^* *на единичной сфере к соответствующей площади* σ *на поверхности, когда эта последняя* [1]) *неограниченно стягивается к точке* M.



Черт. 98.

Чтобы истолковать теперь и знак K, вернемся к формуле (455). Если $K > 0$, то векторные произведения $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ и $[\mathbf{m}_u, \mathbf{m}_v]$ направлены в одну сторону и, следовательно, направление вращения от $\mathbf{r}_u$ к $\mathbf{r}_v$ то же самое, что и от $\mathbf{m}_u$ к $\mathbf{m}_v$ (напоминаем, что эти две пары векторов лежат в параллельных плоскостях) (черт. 98 вверху). Если же $K < 0$, то векторные произведения имеют взаимно обратные направления, и направления вращения от $\mathbf{r}_u$ к $\mathbf{r}_v$ и от $\mathbf{m}_u$ к $\mathbf{m}_v$ противоположны (черт. 98 внизу). В связи с этим нетрудно показать следующее.

Возьмем бесконечно малое смещение из точки M по поверхности

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u\, du + \mathbf{r}_v\, dv$$

и соответствующее ему смещение из точки N по сфере

$$d\mathbf{m} = \mathbf{m}_u\, du + \mathbf{m}_v\, dv.$$

Будем вращать направление $d\mathbf{r}$, увеличивая отношение $\frac{dv}{du}$; тогда в разложении $d\mathbf{r}$ составляющая по $\mathbf{r}_v$ растет сравнительно с составляющей по $\mathbf{r}_u$ и $d\mathbf{r}$ вращается в направлении вращения от $\mathbf{r}_u$ к $\mathbf{r}_v$; соответственно вектор $d\mathbf{m}$ вращается в направлении от $\mathbf{m}_u$ к $\mathbf{m}_v$. Отсюда следует, что при $K > 0$ направление вращения $d\mathbf{m}$ совпадает с направлением вращения $d\mathbf{r}$, а в случае $K < 0$ ему противоположно.

Итак, вращению около точки M *на поверхности в определенном направлении в сферическом отображении поверхности соответствует вращение около точки* N *в том же направлении, если* $K > 0$, *и в обратном, если* $K < 0$.

Говорят, что в первом случае при сферическом отображении *ориентация* поверхности сохраняется, во втором же — меняется на обратную.

[1]) Точнее, область, для которой площадь σ берется.

ГЛАВА VI.

РАЗВЕРТЫВАЮЩИЕСЯ ПОВЕРХНОСТИ.

В этой главе мы будем заниматься одним замечательным частным классом поверхностей, именно развертывающимися поверхностями. Эти поверхности интересны не только по своим специальным геометрическим свойствам, но и по тем применениям, которые они имеют в общей теории.

§ 47. Линейчатые и развертывающиеся поверхности.

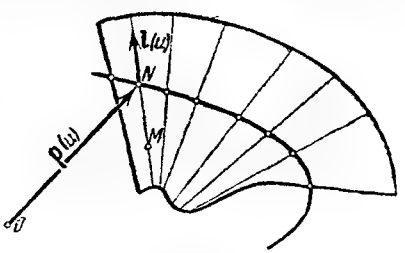
Поверхность, представляющая собой геометрическое место прямых линий, называется *линейчатой*. Точнее, линейчатую поверхность мы будем строить следующим образом.

Возьмем какую-нибудь кривую в пространстве; пусть ρ — ее текущий радиус-вектор, а u — параметр, к которому она отнесена,

$$\rho = \rho(u). \tag{462}$$

Эту кривую мы будем называть *направляющей*. В каждой точке этой кривой зададим единичный вектор, который будет являться, таким образом, также функцией параметра u вдоль кривой,

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}(u). \tag{463}$$



Черт. 99.

Через каждую точку N направляющей линии с радиусом-вектором $\rho(u)$ проводим прямую параллельно вектору $\mathbf{l}(u)$, отвечающему этой точке. В результате мы получаем в пространстве семейство прямых (черт. 99) от одного параметра, именно от u. Эти прямые мы будем называть *образующими*. Выбор образующей определяется, таким образом, значением u; что же касается выбора какой-нибудь точки M на этой образующей, то его мы будем характеризовать расстоянием NM по образующей от направляющей линии до точки M. При этом расстояние NM мы берем со знаком, принимая на образующей направление $\mathbf{l}$ за положительное. Будем обозначать расстояние NM коротко через v,

$$NM = v.$$

В таком случае радиус-вектор произвольной точки M на произвольной образующей, определяемой значением u, можно записать в виде

$$\mathbf{r} = \overline{OM} = \overline{ON} + \overline{NM},$$

где

$$\overline{ON} = \rho(u), \quad \overline{NM} = v\,\mathbf{l}(u);$$

действительно, вектор $\overline{NM}$ параллелен единичному вектору $\mathbf{l}$ и потому отличается от него лишь скалярным множителем, равным длине NM с соответствующим знаком, т. е. этот множитель совпадает с v. Итак, окончательно

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}(u) + v\mathbf{l}(u). \tag{464}$$

В результате радиус-вектор произвольной точки M на произвольной образующей выразился как функция двух независимых параметров u, v. Мы получили, таким образом, *параметрическое представление линейчатой поверхности*, именно той, которая образована прямыми (образующими) построенного нами однопараметрического семейства прямых.

Фиксируя в этом уравнении u и меняя v, мы движемся, очевидно, по образующей, отвечающей данному значению u. Следовательно, семейством координатных линий v у нас будут служить образующие. Если же фиксировать v и менять u, то мы идем по образующим „параллельно“ направляющей линии в том смысле, что расстояние $NM = v$ остается постоянным.

Таким образом координатные линии u образуют семейство линий, „параллельных“ направляющей линии, которая сама также входит в это семейство и отвечает случаю, когда v фиксировано на значении 0.

Заметим, что направляющая линия геометрически ничем на заданной линейчатой поверхности не выделяется. В качестве направляющей может быть взята любая кривая на линейчатой поверхности, последовательно пересекающаяся с ее образующими; произвол этот отразится только на выборе параметров u, v на поверхности.

Вычислим теперь частные производные радиуса-вектора по параметрам. Очевидно

$$\mathbf{r}_u = \boldsymbol{\rho}'(u) + v\mathbf{l}'(u), \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{l}(u). \tag{465}$$

Составим векторное произведение этих векторов, направленное, как мы знаем, по нормали к поверхности [1]):

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = [\boldsymbol{\rho}', \mathbf{l}] + v[\mathbf{l}', \mathbf{l}]. \tag{466}$$

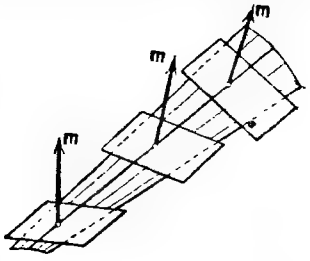
Исследуем поведение нормали к линейчатой поверхности, когда точка движется по поверхности вдоль какой-нибудь образующей, т. е. когда мы меняем v при фиксированном u. Так как $\boldsymbol{\rho}$, $\mathbf{l}$ являются функциями только u, то векторные произведения $[\boldsymbol{\rho}', \mathbf{l}]$ и $[\mathbf{l}', \mathbf{l}]$ остаются постоянными, и правая часть (466) может меняться лишь вследствие изменения коэфициента v.

Здесь мы будем различать два случая, общий и специальный.

Общий случай: векторные произведения $[\boldsymbol{\rho}', \mathbf{l}]$ и $[\mathbf{l}', \mathbf{l}]$ непараллельны. В этом случае при движении вдоль образующей, т. е. при изменении v, первое слагаемое в правой части (466) постоянно, второе же, ему не параллельное, изменяется пропорционально v. В результате вся правая часть представляет собой вектор, направление которого

[1]) Мы предполагаем, как обычно, что векторы $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ непараллельны.

меняется вместе с v. Следовательно, вдоль образующей направление нормали к поверхности меняется от точки к точке. Очевидно, что касательная плоскость в какой-нибудь точке на данной образующей проходит через эту образующую (так как образующая является своей собственной касательной). Поэтому при движении точки касания вдоль образующей касательная плоскость, все время проходя через образующую, вращается около нее. В этом случае линейчатая поверхность называется *косой* (черт. 100).



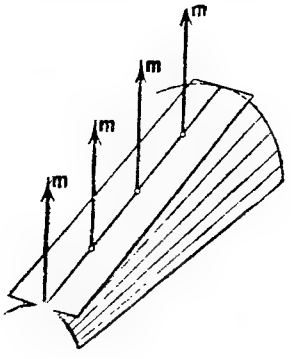
Черт. 100.

Специальный случай: векторные произведения $[\rho', \mathbf{l}]$ и $[\mathbf{l}', \mathbf{l}]$ параллельны. В этом случае оба слагаемых в правой части (466) параллельны друг другу (а следовательно, и своей сумме) при любом значении v. Таким образом все нормали вдоль данной образующей параллельны между собой, так как они параллельны векторам $[\rho', \mathbf{l}]$ и $[\mathbf{l}', \mathbf{l}]$. Когда точка касания движется вдоль образующей, то касательная плоскость проходит все время через образующую; и так как касательная плоскость должна, кроме того, оставаться перпендикулярной неизменному направлению нормали, то она не может вращаться около образующей и остается неподвижной.

Итак, в рассматриваемом случае *касательные плоскости к поверхности в точках, расположенных на одной и той же образующей, совпадают между собой.* Такую линейчатую поверхность мы будем называть *развертывающейся поверхностью.*

Обратно, если мы имеем развертывающуюся поверхность, то касательная плоскость для всех точек образующей одна и та же, и нормали вдоль образующей параллельны (черт. 101). Другими словами, направление вектора (466) не зависит от значения v, что возможно лишь в случае

$$[\rho', \mathbf{l}] \parallel [\mathbf{l}', \mathbf{l}]. \qquad (467)$$



Черт. 101.

Таким образом условие (467) необходимо и достаточно для того, чтобы линейчатая поверхность оказалась развертывающейся. Этому условию можно придать более простую форму. Так как векторные произведения перпендикулярны плоскостям их множителей, то их параллелизм означает параллелизм этих плоскостей. Следовательно, в нашем случае ρ', $\mathbf{l}$, $\mathbf{l}'$ параллельны одной плоскости (компланарны). Легко видеть, что это условие и достаточно. Итак, условие (467) может быть переписано в эквивалентном виде:

$$\mathbf{l}(u), \mathbf{l}'(u), \rho'(u) \text{ компланарны, т. е. } (\mathbf{l}\mathbf{l}'\rho') = 0. \qquad (468)$$

Это условие наложено, как мы видим, на вектор-функции $\rho(u)$ (радиус-вектор направляющей кривой) и $\mathbf{l}(u)$ (единичный вектор на образующей). Плоскость векторов (468) будет параллельна векторам (465) при любом значении v, т. е. параллельна касательной плоскости, проходящей через соответствующую образующую. Заметим, что для любой линейчатой поверхности $(\mathbf{l}\, d\mathbf{l}\, d\rho) = |d\mathbf{l}|\lambda$, где λ — главная часть расстояния между бесконечно близкими образующими u и $u + du$ по общему перпендикуляру. Поэтому (468) означает (если $d\mathbf{l} \neq 0$), что $\lambda = 0$, т. е. что указанное расстояние бесконечно малое высшего порядка.

Пример.

Минимальным геликоидом называется линейчатая поверхность, описываемая подвижной прямой (образующей), которая, все время пересекая под прямым углом некоторую неподвижную прямую (ось), вращается около этой оси и одновременно смещается вдоль нее пропорционально углу поворота.

Образующие геликоида расположены, следовательно, наподобие ступенек винтовой лестницы.

Если принять ось геликоида за ось Z и считать ее *направляющей* линией поверхности, то можно записать:

$$\rho(u) = \lambda u \mathbf{k},$$

где за параметр u принят угол поворота образующей сравнительно с начальным ее положением, а λ — постоянный коэфициент пропорциональности.

Если начальное положение образующей принять за ось X, то вектор $\mathbf{l}$, указывающий направление образующей, будет в нашем случае

$$\mathbf{l}(u) = \mathbf{i}\cos u + \mathbf{j}\sin u.$$

Записать параметрическое представление геликоида в виде (464), найти его первую и вторую квадратичные формы и показать, что геликонд — поверхность минимальная.

Показать, что одно семейство асимптотических линий совпадает с образующими, а второе — с винтовыми линиями, описываемыми точками подвижной образующей.

Показать, что уравнения линий кривизны будут

$$v = \pm \operatorname{sh}(u - u_0), \quad u_0 = \text{const}.$$

§ 48. Строение развертывающейся поверхности.

Поставим себе задачей выяснить строение развертывающейся поверхности во всех возможных случаях. Для этой цели постараемся прежде всего найти на данной развертывающейся поверхности кривую, для которой образующие служили бы касательными. Такая кривая, если она существует, называется *ребром возврата* поверхности. Мы ищем уравнение ребра возврата в виде

$$v = v(u),$$

т. е. на каждой образующей (определяемой значением u) отмечаем точку со значением v, равным $v(u)$. Вид функции $v(u)$ пока неопределенный. Вставляя это выражение для v в параметрическое предста-

вление поверхности (464), получим параметрическое представление рассматриваемой кривой уже в пространстве:

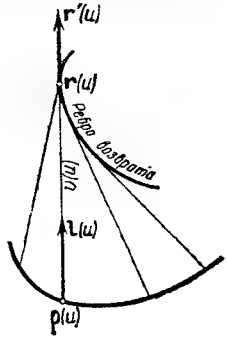
$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}(u) + v(u)\,\mathbf{l}(u). \tag{469}$$

Диференцируя радиус-вектор этой кривой по параметру u, получим касательный к ней вектор

$$\mathbf{r}' = \boldsymbol{\rho}' + v'\mathbf{l} + v\mathbf{l}'. \tag{469'}$$

Потребуем теперь, чтобы этот вектор был параллелен $\mathbf{l}$, т. е. чтобы касательная к кривой была параллельна, а следовательно, и совпадала с той образующей, на которой лежит точка касания (черт. 102). Очевидно, для этого необходимо и достаточно, чтобы вектор $\mathbf{r}'$ был параллелен $\mathbf{l}$. Так как в правой части (469') вектор $v'\mathbf{l}$ заведомо параллелен $\mathbf{l}$, то необходимо и достаточно, чтобы

$$\boldsymbol{\rho}' + v\mathbf{l}' \parallel \mathbf{l}. \tag{470}$$



Черт. 102.

Будем считать, что $\boldsymbol{\rho}'$ и $\mathbf{l}$ непараллельны. Действительно, в противном случае $\mathbf{l}(u)$ в каждой точке направляющей линии был бы направлен по касательной к ней, и задача была бы уже решена: сама направляющая служила бы ребром возврата.

Исключив этот случай и пользуясь условием (468), мы можем разложить при каждом значении u вектор $\mathbf{l}'(u)$ по $\mathbf{l}(u)$ и $\boldsymbol{\rho}'(u)$:

$$\mathbf{l}'(u) = \alpha(u)\,\mathbf{l}(u) + \beta(u)\,\boldsymbol{\rho}'(u), \tag{471}$$

где α и β — функции от u, определяющиеся как коэфициенты разложения.

Вставляя это разложение в условие (470), получим

$$(1 + v\beta)\,\boldsymbol{\rho}' + v\alpha\,\mathbf{l} \parallel \mathbf{l}.$$

Так как $\boldsymbol{\rho}'$ заведомо не параллельно $\mathbf{l}$, то выписанное требование осуществляется тогда и только тогда, если коэфициент при $\boldsymbol{\rho}'$ обращается в нуль, т. е. если

$$1 + v\beta = 0. \tag{472}$$

Итак, для того чтобы уравнение $v = v(u)$ определяло на развертывающейся поверхности ребро возврата, необходимо и достаточно, чтобы функция $v(u)$ удовлетворяла уравнению (472), где $\beta(u)$ — коэфициент разложения (471).

Разберем возможные здесь случаи.

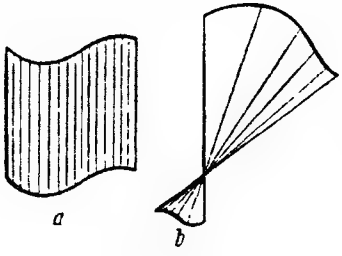
1. $\beta(u) \equiv 0$.

В этом случае равенство (472) невозможно ни при каком $v(u)$, и ребра возврата не существует. Разложение (471) принимает вид

$$\mathbf{l}'(u) = \alpha(u)\,\mathbf{l}(u),$$

т. е. $\mathbf{l}'(u)$ параллельно $\mathbf{l}$. Но, кроме того, известно, что $\mathbf{l}'$ перпендикулярно $\mathbf{l}$, так как $\mathbf{l}(u)$ — единичный вектор. Следовательно, получается противоречие, если допустить, что $\mathbf{l}'$ отлично от нуля, и мы вынуждены принять, что

$$\mathbf{l}'(u) = 0, \quad \mathbf{l}(u) = \text{const}.$$



Черт. 103.

Отсюда вытекает, что все образующие поверхности параллельны между собой, и наша развертывающаяся поверхность представляет в рассматриваемом случае *цилиндрическую поверхность* (черт. 103,*a*).

Обратно, если построить произвольную цилиндрическую поверхность, т. е. линейчатую поверхность с произвольной направляющей линией, но с постоянным $\mathbf{l}(u)$, то $\mathbf{l}'(u)$ обращается в нуль, и условие (468) имеет место (вектор нуль компланарен с любыми двумя векторами). Таким образом любая цилиндрическая поверхность является развертывающейся; особенностью этого частного случая является отсутствие ребра возврата.

2. $\beta(u) \neq 0$.

В таком случае $v(u)$ определится у нас из (472):

$$v(u) = -\frac{1}{\beta(u)},$$

и ребро возврата, рассматриваемое в пространстве, имеет уравнение вида (469)

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}(u) - \frac{1}{\beta(u)}\mathbf{l}(u). \tag{473}$$

Здесь имеют место две возможности:

а) $\mathbf{r}$, определяемое уравнением (473), окажется постоянным, т. е. фактически независимым от u. Тогда уравнение (473) определит не линию, а точку; можно сказать, что в этом случае ребро возврата вырождается в точку. Таким образом точки, отмечаемые нами на каждой образующей посредством уравнения

$$v = -\frac{1}{\beta(u)},$$

фактически совпадают между собой. Все образующие проходят через общую точку, и наша поверхность оказывается *конической поверхностью* (черт. 103,*b*).

Обратно, произвольная коническая поверхность, т. е. линейчатая поверхность, образующие которой проходят через фиксированную точку O, есть частный случай развертывающейся поверхности. Действительно, если точку O выбрать за начало координат, то радиус-вектор любой точки на поверхности будет лежать на соответствующей

образующей и будет параллелен, следовательно, вектору $\mathbf{l}(u)$. В частности, $\boldsymbol{\rho}(u)$ и $\mathbf{l}(u)$ также будут параллельны, т. е.

$$\boldsymbol{\rho}(u) = p(u)\mathbf{l}(u),$$

где $p(u)$ — скалярный коэфициент. Отсюда

$$\boldsymbol{\rho}' = p\mathbf{l}' + p'\mathbf{l}$$

и, следовательно, требование компланарности (468) соблюдается.

Итак, специальным классом развертывающихся поверхностей являются, кроме цилиндрических, и конические поверхности. Конечно, проверку этого факта можно произвести и совершенно непосредственно, убедившись в неизменности касательной плоскости, когда точка касания движется вдоль образующей.

б) $\mathbf{r}$, определяемое формулой (473) как функция u, — существенно переменное, и мы получаем кривую — *ребро возврата*. Это наиболее общий случай развертывающейся поверхности. По определению ребра возврата образующие нашей поверхности служат для него касательными. Отсюда в наиболее общем случае мы можем представлять себе развертывающуюся поверхность как *геометрическое место касательных к некоторой пространственной кривой.*

Обратно, линейчатая поверхность, образованная касательными к *произвольной* пространственной кривой, всегда дает нам развертывающуюся поверхность. Действительно, примем эту кривую за направляющую линию

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(u)$$

на полученной линейчатой поверхности. Так как образующие поверхности в каждой точке этой кривой направлены по ее касательным, то вектор $\mathbf{l}(u)$ всегда параллелен $\boldsymbol{\rho}'(u)$ и, следовательно, условие (468) соблюдается. Мы имеем развертывающуюся поверхность.

Итак, *развертывающаяся поверхность в случае* б) *есть геометрическое место касательных к произвольной пространственной кривой*, которая по отношению к поверхности есть ребро возврата. Только что было отмечено, что если принять эту кривую за направляющую, то векторы $\mathbf{l}(u)$ и $\boldsymbol{\rho}'(u)$ будут параллельны:

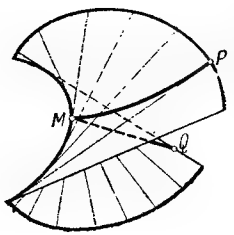
$$\boldsymbol{\rho}'(u) = a(u)\mathbf{l}(u),$$

где $a(u)$ — скалярный коэфициент. Диференцируя это равенство, получим

$$\boldsymbol{\rho}''(u) = a(u)\mathbf{l}'(u) + a'(u)\mathbf{l}(u),$$

т. е. $\boldsymbol{\rho}''$ при каждом значении u компланарно с векторами $\mathbf{l}$, $\mathbf{l}'$ и, следовательно, вместе с векторами (468) параллельно плоскости, касательной к поверхности вдоль образующей (отвечающей данному значению u). Следовательно, эта касательная плоскость, проходя через точку ребра возврата с радиусом-вектором $\boldsymbol{\rho}(u)$ параллельно векторам $\boldsymbol{\rho}'(u)$ и $\boldsymbol{\rho}''(u)$, является *соприкасающейся плоскостью* ребра возврата в точке $\boldsymbol{\rho}(u)$. *Касательные плоскости развертывающейся поверхности совпадают*

с соприкасающимися плоскостями ее ребра возврата. Развертывающаяся поверхность своим ребром возврата делится на *две полости.* А именно, когда точка касания описывает ребро возврата, то касательная к нему описывает развертывающуюся поверхность, причем полукасательная, расположенная по одну сторону точки касания, описывает одну полость, а другая полукасательная — другую. Эти две полости как бы обрезаны по ребру возврата и склеены вдоль него друг с другом и притом довольно своеобразно. А именно, обе полости подходят к ребру возврата с одной стороны (черт. 104) и склеиваются там под углом нуль, т. е. касаясь друг друга. Если пересечь развертывающуюся поверхность плоскостью, нормальной к ребру возврата в какой-нибудь точке M, то в сечении получается кривая вида PMQ, имеющая в M точку возврата. В точке M встречаются ее ветви PM и QM, полученные пересечением нормальной плоскости с двумя полостями развертывающейся поверхности. Конечно, точки ребра возврата являются особыми для развертывающейся поверхности.



Черт. 104.

Проверка всех этих утверждений требует добавочных выкладок, которые мы опускаем.

Итак, у нас исчерпаны все возможные случаи строения развертывающейся поверхности: специальные — *цилиндрические* и *конические* поверхности — и общий — *геометрическое место касательных* к какой-нибудь кривой в пространстве. В частности, эту кривую можно взять плоской, и тогда развертывающаяся поверхность оказывается плоскостью.

Докажем теперь, что *развертывающуюся поверхность (по крайней мере в окрестности любой обыкновенной точки) можно путем непрерывной деформации, сохраняющей без изменения длины всех кривых на поверхности, наложить на плоскость.* Другими словами, изгибая кусок развертывающейся поверхности *без растяжений и сжатий,* мы можем сделать его куском плоскости. Этим и объясняется само название поверхности „развертывающеюся". Другие поверхности таким свойством не обладают; например, если взять кусок поверхности сферы, даже очень малый, то его никоим образом нельзя развернуть на плоскость, если не прибегать к растяжениям или сжатиям.

Для доказательства примем за направляющую линию $\rho(u)$ ребро возврата (в случае цилиндрических и конических поверхностей теорема почти очевидна), причем u считаем длиной дуги вдоль ребра возврата. Так как образующие совпадают с касательными, то вектор $\mathbf{l}(u)$ совпадает с единичным касательным вектором $\mathbf{t}(u)$. Уравнение (464) примет вид

$$\mathbf{r} = \rho(u) + v\mathbf{t}(u).$$

Отсюда

$$\mathbf{r}_v = \mathbf{t}.\ \mathbf{r}_u = \mathbf{t} + vk\mathbf{n},$$

где $\rho'(u)$ заменено через $\mathbf{t}$, а $\mathbf{t}'(u)$ — по первой формуле Френе — через $k\mathbf{n}$.

Отсюда коэфициенты первой квадратичной формы вычисляются так:

$$E = \mathbf{r}_u^2 = 1 + v^2k^2(u), \quad F = \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v = 1, \quad G = \mathbf{r}_v^2 = 1.$$

Будем непрерывно изменять ребро возврата, как пространственную кривую; для этой цели можно непрерывно менять вид функций, входящих в его натуральные уравнения:

$$k = k(u) > 0, \quad \varkappa = \varkappa(u).$$

Сообразно нашим целям будем оставлять вид функции $k(u)$ без изменения, а вид функции $\varkappa(u)$ будем менять непрерывно с таким расчетом, чтобы $\varkappa(u)$ в конце концов обратилось тождественно в нуль,

$$\varkappa(u) = 0,$$

т. е. чтобы ребро возврата сделалось плоской кривой.

При указанной деформации ребра возврата будет непрерывно деформироваться и определяемая им развертывающаяся поверхность, причем в конце концов она станет плоской (для плоского ребра возврата).

Теперь нужно убедиться в том, что это наложение на плоскость (взаимно однозначный характер которого можно гарантировать лишь в малом) происходило без изменения длин кривых на поверхности. Но это сразу видно из выражений для E, F, G, так как $\varkappa(u)$ в эти выражения не входит, а вид функции $k(u)$ остается неизменным; следовательно, и вид функций E, F, G по отношению к аргументам u, v остается прежним. Отсюда следует, что и длины всех кривых на поверхности, выражаемые согласно формуле (344), остаются в процессе деформации неизменными.

§ 49. Огибающая семейства поверхностей от одного параметра.

Рассмотрим в пространстве семейство поверхностей, зависящих от одного параметра C:

$$F(x, y, z, C) = 0. \tag{474}$$

Каждому значению C в рассматриваемой области его изменения отвечает поверхность, определяемая уравнением (474). Для семейства (474) можно развить теорию огибающих, аналогичную теории огибающих семейства кривых на плоскости.

Огибающей мы будем называть поверхность, которая в каждой своей точке касается некоторой поверхности семейства.

При этом предполагается, что на рассматриваемых поверхностях принимаются во внимание только заведомо обыкновенные точки, особые же точки устранены из рассмотрения.

Будем искать уравнение огибающей (или ее части) в виде

$$\varphi(x, y, z) = 0, \tag{475}$$

предполагая, что огибающая семейства (474) существует. Пусть $M(x, y, z)$ — какая-нибудь точка, взятая на огибающей. Тогда по определению огибающей эта же точка лежит и на некоторой поверх-

ности семейства, причем касательная плоскость будет в этой точке общей для обеих поверхностей.

Пусть C — значение параметра, отвечающее этой поверхности семейства. В таком случае координаты x, y, z удовлетворяют, во-первых, уравнению огибающей

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

и, во-вторых, — совместно с C — уравнению поверхности семейства

$$F(x, y, z, C) = 0. \tag{476}$$

Эти два равенства имеют место в каждой точке огибающей. Поэтому при бесконечно малом смещении точки $M(x, y, z)$ по огибающей мы имеем право диференцировать эти равенства почленно. Получим

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_z dz = 0, \\ &F_x dx + F_y dy + F_z dz + F_C dC = 0, \end{aligned}\right\} \tag{477}$$

где dx, dy, dz, dC — диференциалы, соответствующие проделанному бесконечно малому смещению [1]). Но так как касательные плоскости для обеих поверхностей в точке $M(x, y, z)$ совпадают, то нормаль тоже общая, и градиенты

$$\varphi_x \mathbf{i} + \varphi_y \mathbf{j} + \varphi_z \mathbf{k}, \quad F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k},$$

направленные по нормалям соответственно к огибающей и к поверхности семейства (§ 24), должны быть параллельны. Другими словами,

$$F_x : \varphi_x = F_y : \varphi_y = F_z : \varphi_z.$$

В таком случае первое из уравнений (477) влечет за собой

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0,$$

так что от второго уравнения остается только

$$F_C dC = 0.$$

Случай $dC = 0$ мы оставляем в стороне, так как он означал бы, что C сохраняет при движении точки $M(x, y, z)$ по огибающей одно и то же значение, т. е. что все точки $M(x, y, z)$ на огибающей попадают на одну и ту же поверхность семейства. Формально это не противоречит нашему определению огибающей, но, конечно, случай совпадения огибающей с одной из поверхностей семейства мы оставляем в стороне, как вполне тривиальный. Тогда мы должны считать, что $dC \neq 0$ и, следовательно,

$$F_C = 0.$$

---

[1]) Вполне уточненное доказательство можно получить, относя огибающую поверхность к ее параметрам u, v и рассматривая x, y, z, а также C, как функции этих параметров. Тогда (475) и (476) превращаются в тождества относительно u, v и в качестве таковых диференцируются почленно (берутся полные диференциалы при аргументах u, v).

Итак, *каждая точка* $M(x, y, z)$ *на огибающей и параметр* C, *отвечающий поверхности семейства, которая касается огибающей в этой точке, связаны уравнениями*

$$F(x, y, z, C) = 0, \quad F_C(x, y, z, C) = 0. \tag{478}$$

Рассмотрим теперь эту пару уравнений независимо от огибающей. Так как здесь мы имеем два уравнения, связывающие четыре величины, то практически можно ожидать, что отсюда удастся выразить x, y, z и C как функции двух из них, или, более обще, как функции двух каких-нибудь независимых параметров u, v в достаточно малых областях изменения величин x, y, z, C; более детальный анализ условий этого мы оставляем в стороне.

Тогда x, y, z, выраженные как функции u, v, определят нам некоторую поверхность, а C, тоже как функция u, v, сопоставит каждой точке этой поверхности определенное значение C. Полученную поверхность (или, точнее, систему всевозможных таких поверхностей) мы будем называть *дискриминантной* поверхностью. В каждой точке этой поверхности и для соответствующего значения C соблюдаются по определению уравнения (478).

Так как выше мы выяснили, что для огибающей и соответствующих ее точкам значений C уравнения (478) заведомо имеют место, то отсюда следует, что *огибающая в каждом своем куске лежит на дискриминантной поверхности.*

Теперь мы докажем и обратное, именно, что *дискриминантная поверхность в каждом своем куске является огибающей.* Тем самым будет установлено полное тождество обеих поверхностей.

Пусть $M(x, y, z)$ — какая-нибудь точка на дискриминантной поверхности и C — соответствующее значение параметра. Тогда имеют место равенства (478); прежде всего

$$F(x, y, z, C) = 0, \tag{479}$$

т. е. поверхность семейства, отвечающая данному значению C [обозначим ее коротко через (C)], проходит через точку M. Покажем, более того, что она касается дискриминантной поверхности в этой точке M. Этим наше утверждение будет доказано. Сместимся из точки M по дискриминантной поверхности; так как (479) имеет место в любой ее точке, то мы имеем право это равенство дифференцировать. Получаем

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz + F_C\,dC = 0,$$

где дифференциалы отвечают бесконечно малому смещению по дискриминантной поверхности (см. предшествующую сноску). Но так как x, y, z, C удовлетворяют и второму из уравнений (478), то $F_C = 0$ и мы получаем

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = 0. \tag{480}$$

Обозначим коротко

$$\nabla F = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k};$$

это — градиент левой части уравнения поверхности семейства, направленный, как мы знаем (см. § 24), по нормали к поверхности семейства. Он взят нами в точке $M(x, y, z)$ при соответствующем ей значении C и направлен, следовательно, по нормали к поверхности (C) в точке M. Далее, дифференциал радиуса-вектора $d\mathbf{r}$ при рассматриваемом смещении по дискриминантной поверхности можно записать в виде

$$d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}.$$

Отсюда левую часть (480) можно представить в виде скалярного произведения:

$$d\mathbf{r}\,\nabla F = 0.$$

Так как $d\mathbf{r}$ — дифференциал радиуса-вектора при произвольном смещении из точки M по дискриминантной поверхности, то все касательные к этой поверхности в точке M направлены перпендикулярно ∇F. Следовательно, ∇F направлен по нормали к дискриминантной поверхности в точке M. А так как, кроме того, он направлен по нормали к поверхности (C) в той же точке M, то нормали и касательные плоскости к обеим поверхностям в точке M совпадают. Это значит, что дискриминантная поверхность в каждом своем куске является и огибающей.

Итак, *огибающая поверхность совпадает с дискриминантной поверхностью* (478). Заметим, что при доказательстве существенную роль играло предположение, что в рассматриваемой области на поверхностях имеются лишь заведомо обыкновенные точки. Это сказалось в том, что мы градиенты поверхности предполагали отличными от нуля, без чего наше доказательство оказалось бы несостоятельным.

При практическом отыскании огибающей мы используем ее совпадение с дискриминантной кривой, т. е. исходим из уравнения (478). Конечно, нет необходимости обязательно выражать x, y, z, C в функции двух независимых параметров, как это мы делали при теоретическом рассмотрении. Нас вполне устроит, если удастся исключить из этих двух уравнений C, получив одно уравнение непосредственно между текущими координатами x, y, z — уравнение огибающей.

В заключение следует ввести еще одно важное понятие, связанное с предыдущими построениями. До сих пор мы исходили из огибающей и уже в связи с ней рассматривали поверхности семейства. Пусть теперь, наоборот, дана поверхность семейства (C)

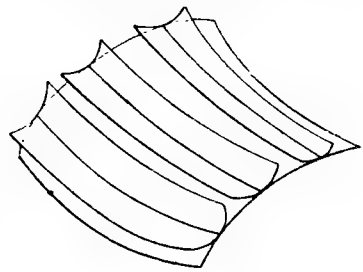
$$F(x, y, z, C) = 0 \tag{481}$$

при каком-нибудь *фиксированном* значении C. Нас интересуют те точки этой поверхности, где ее касается огибающая. Мы знаем, что координаты этих точек связаны с соответствующим значением параметра C уравнениями (478). Следовательно, к уравнению (481), выражающему, что точка (x, y, z) лежит на поверхности (C), нужно присоединить уравнение

$$F_C'(x, y, z, C) = 0. \tag{482}$$

Так как сейчас C фиксировано, т. е. поверхность (C) задана, то уравнения (481) и (482) наложены только на (x, y, z) и определяют нам, как правило, кривую, лежащую на поверхности (C). Точки этой кривой лежат в то же время и на огибающей, причем всем им отвечает фиксированное значение C, т. е. во всех этих точках огибающая касается одной и той же поверхности (C).

Кривая, вдоль которой огибающая касается данной поверхности семейства, называется *характеристикой*. Уравнения (478) превращаются в уравнение характеристики при фиксированном C. Очевидно, огибающую можно рассматривать как геометрическое место характеристик: каждая из поверхностей семейства касается огибающей по характеристике, которые в совокупности заполняют всю огибающую (черт. 105).



Черт. 105.

Нетрудно доказать, что если существует предельное положение линии пересечения бесконечно близких поверхностей семейства (C) и $(C+\Delta C)$ при $\Delta C \to 0$, то это будет характеристика, лежащая на (C).

Пример.

Каналовой поверхностью называется огибающая семейства сфер

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0,$$

где a, b, c, R суть функции параметра C.

Показать, что характеристики будут в этом случае окружностями, так что каналовая поверхность всегда образована ∞^1 окружностей (обратное, однако, неверно).

§ 50. Развертывающаяся поверхность как огибающая семейства плоскостей.

Изучим теперь важный частный случай огибающей семейства поверхностей, именно, когда эти поверхности суть плоскости. Общий вид уравнения такого семейства будет

$$A(\alpha)x+B(\alpha)y+C(\alpha)z+D(\alpha)=0, \tag{483}$$

где x, y, z — текущие координаты плоскости, а A, B, C, D — коэфициенты ее уравнения, зависящие от параметра семейства α.

Найдем *характеристику*, лежащую на данной плоскости семейства. Для этого к уравнению (483) нужно присоединить, как мы знаем из § 49, еще уравнение

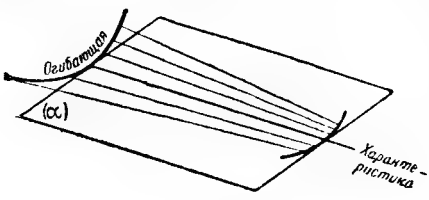
$$A'(\alpha)x+B'(\alpha)y+C'(\alpha)z+D'(\alpha)=0, \tag{484}$$

полученное диференцированием левой части (483) по параметру α. Уравнения (483) и (484) совместны и независимы [1]). Тогда совместно

[1]) Эти предположения, очевидно, всегда имеют место, за исключением случая $A':A=B':B=C':C$, с которым мы кратко ознакомимся, чтобы в даль-

они определяют на данной плоскости семейства прямую, которая и будет служить характеристикой. Итак, характеристики в нашем случае — прямые, и огибающая — как их геометрическое место — представляет собою линейчатую поверхность. Эта поверхность, как легко показать, будет не только линейчатой, но и развертывающейся. Действительно, вдоль характеристики, т. е. вдоль своей прямолинейной образующей, огибающая поверхность касается поверхности семейства, т. е. некоторой плоскости из семейства (483) (черт. 106). Эта плоскость служит, таким образом, общей касательной плоскостью во всех точках образующей, так что наша огибающая является развертывающейся поверхностью по самому определению последней.

Обратно, всякая развертывающаяся поверхность есть огибающая некоторого семейства плоскостей от одного параметра. Действительно, семейство образующих развертывающейся поверхности зависит от одного параметра. А так как через данную образующую проходит единственная касательная плоскость (касающаяся поверхности во всех точках образующей), то семейство всевозможных касательных плоскостей к развертывающейся поверхности будет зависеть *только от одного параметра* (в отличие от этого, для произвольной поверхности семейство касательных плоскостей будет зависеть от двух параметров). В результате развертывающаяся поверхность в каждой своей точке касается некоторой плоскости из однопараметрического семейства своих касательных плоскостей, т. е. является для этого семейства огибающей.



Черт. 106.

Итак, *для того чтобы поверхность была развертывающейся, необходимо и достаточно, чтобы она была огибающей семейства плоскостей от одного параметра.*

Следовательно, развертывающейся поверхности можно дать второе определение как огибающей однопараметрического семейства плоскостей.

Продолжим теперь изучение семейства плоскостей, заданного уравнением (483). Мы знаем, что огибающая отыскивается как геометрическое место прямых (характеристик), определяемых парой уравнений (483), (484) при всевозможных значениях α. Поставим вопрос, *как найти ребро возврата огибающей, если таковое существует* (т. е. если огибающая — не цилиндрическая и не коническая поверхность).

нейшем оставить его в стороне. Путем почленного интегрирования по x мы убеждаемся, что $\ln A$, $\ln B$, $\ln C$ могут отличаться друг от друга лишь постоянными слагаемыми, а следовательно, $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ находятся друг к другу в постоянных отношениях. Другими словами, у всех плоскостей семейства (483) коэфициенты A, B, C пропорциональны, что означает параллелизм всех этих плоскостей. Итак, (483) представит нам пучок параллельных плоскостей (в частном случае сливающихся в одну плоскость). Огибающей, очевидно, не существует.

Отметим для каждого значения α на отвечающей ему характеристике точку, где эта характеристика (образующая развертывающейся поверхности) касается ребра возврата. Пусть координаты этой точки выразятся пока неизвестными нам функциями

$$x = x(\alpha), \quad y = y(\alpha), \quad z = z(\alpha). \tag{485}$$

Тогда эти функции удовлетворяют прежде всего уравнениям (483) и (484). так как при каждом значении α соответствующая точка (485) лежит на соответствующей характеристике. Итак, имеем тождества

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{486}$$

где аргумент α при всех рассматриваемых величинах для краткости не выписывается.

Теперь нужно дополнительно выставить требование, чтобы при каждом значении α производная радиуса-вектора

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$$

вдоль ребра возврата была направлена по соответствующей характеристике. Но эта характеристика лежит, во-первых, на плоскости (483) и, следовательно, перпендикулярна вектору

$$A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k},$$

а, во-вторых, — на плоскости (484) и, следовательно, перпендикулярна вектору

$$A'\mathbf{i} + B'\mathbf{j} + C'\mathbf{k}.$$

Очевидно, этими условиями направление характеристики вполне определяется, так что, для того чтобы $\mathbf{r}'$ был направлен по характеристике, необходимо и достаточно, чтобы он был перпендикулярен выписанным двум векторам. Запишем это, приравнивая нулю скалярные произведения вектора $\mathbf{r}'$ с каждым из двух выписанных векторов:

$$\left.\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' &= 0, \\ A'x' + B'y' + C'z' &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{487}$$

Итак, условия (486) и (487), наложенные на функции (485), необходимы и достаточны, чтобы кривая, определяемая уравнениями (485), была ребром возврата для огибающей рассматриваемого семейства плоскостей. Действительно, (486) выражает, что при каждом α точка кривой (485) лежит на соответствующей характеристике, а (487) — что эта характеристика направлена по касательной к кривой (485) и, следовательно, с этой касательной совпадает.

Условия (486), (487) нетрудно преобразовать. Диференцируя первое из равенств (486) по α, получим

$$A'x + B'y + C'z + D' + Ax' + By' + Cz' = 0.$$

Принимая во внимание второе из равенств (486), можно отбросить здесь первые четыре члена. Получаем первое из равенств (487), которое, таким образом, самостоятельного значения не имеет и получается как следствие из (486).

Диференцируем теперь второе из равенств (486). Тогда

$$A''x + B''y + C''z + D'' + A'x' + B'y' + C'z' = 0.$$

Принимая во внимание второе из равенств (487), можно отбросить здесь последние три члена, после чего получается

$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0. \tag{488}$$

Обратно, из (488) и из предыдущего равенства немедленно следует второе из условий (487). Поэтому, условия (486) и (487) равносильны условиям (486) с добавлением условия (488). Окончательно получаем следующие требования, наложенные на $x(\alpha)$, $y(\alpha)$, $z(\alpha)$:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0, \\ A''x + B''y + C''z + D'' &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{489}$$

необходимые и достаточные для того, чтобы функции $x(\alpha)$, $y(\alpha)$, $z(\alpha)$ определяли ребро возврата.

Если определитель системы отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \neq 0, \tag{490}$$

то система трех линейных уравнений (489) однозначно разрешается относительно x, y, z, и искомые функции, определяющие параметрическое представление ребра возврата, получаются непосредственно. При этом не исключена возможность, что x, y, z окажутся постоянными, т. е. ребро возврата выродится в точку (случай, когда семейство плоскостей огибает коническую поверхность). В случае же тождественного обращения в нуль определителя (490) линейные уравнения системы (489), как известно, несовместны (что означает отсутствие ребра возврата) или при добавочном условии зависимы между собой, так что их решение становится неопределенным.

Чтобы уяснить себе положение вещей в этом случае, составим вектор-функцию параметра α:

$$\mathbf{N}(\alpha) = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}. \tag{49}$$

Очевидно, что обращение в нуль определителя (490) можно записать теперь в виде

$$\mathbf{N}\mathbf{N}'\mathbf{N}'' = 0,$$

где в левой части стоит смешанное произведение векторов $\mathbf{N}(\alpha)$, $\mathbf{N}'(\alpha)$, $\mathbf{N}''(\alpha)$. Другими словами, $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$, $\mathbf{N}''$ компланарны. Обозначим

через $\mathbf{n}(\alpha)$ единичный вектор, перпендикулярный к их плоскости; тогда

$$\mathbf{nN} = \mathbf{nN'} = \mathbf{nN''} = 0. \tag{492}$$

Диференцируем по α первые два произведения:

$$\mathbf{n'N} + \mathbf{nN'} = \mathbf{n'N'} + \mathbf{nN''} = 0.$$

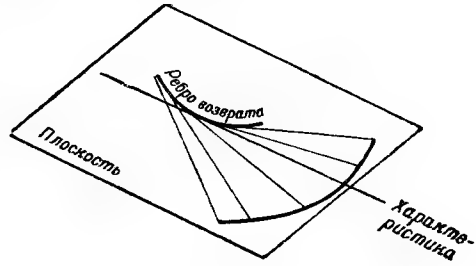
Сравнивая с (492), получим

$$\mathbf{n'N} = \mathbf{n'N'} = 0.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{n'} = 0$; действительно, в противном случае $\mathbf{n'}$ ортогонален плоскости N, N′ (N и N′ неколлинеарны, см. сноску в начале этого параграфа) и, следовательно, параллелен $\mathbf{n}$, что невозможно, так как $|\mathbf{n}| = 1$ и $\mathbf{n'} \perp \mathbf{n}$.

Итак, $\mathbf{n'} = 0$, $\mathbf{n} = \text{const}$, а следовательно, вектор $\mathbf{N}(\alpha)$ ортогонален все время постоянному вектору $\mathbf{n}$.

Так как плоскости семейства (483) перпендикулярны соответствующим векторам $\mathbf{N}(\alpha)$, то *постоянный вектор* $\mathbf{n}$ *параллелен плоскостям семейства* (483) *при любом значении* α.



Черт. 107.

Все плоскости семейства оказываются параллельными постоянному вектору. В результате их огибающая будет цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными тому же вектору. Ребро возврата отсутствует, что отвечает несовместности уравнений (489).

Возможно, однако, вырождение такого семейства просто в пучок плоскостей; тогда цилиндрическая огибающая поверхность вырождается в ось пучка. Понятие ребра возврата теряет вообще смысл, и этому-то случаю отвечает линейная зависимость между уравнениями (489) и неопределенность их решения.

Итак, если оставить в стороне исключительные случаи, то при каждом значении α уравнение (483) определяет плоскость семейства; уравнения (483) и (484) определяют на этой плоскости прямую — характеристику. Присоединяя еще одно уравнение, мы приходим к системе (489), которая на этой характеристике определяет точку ребра возврата. Когда параметр α меняется, то характеристика описывает огибающую развертывающуюся поверхность, для которой плоскости семейства служат касательными вдоль характеристик; точка, отмеченная на характеристике, описывает ребро возврата, для которого характеристики служат касательными, а плоскости семейства — соприкасающимися плоскостями (последнее вытекает из свойств ребра возврата, см. § 48) (черт. 107).

Заметим еще, что характеристику из данной плоскости семейства можно получить как предельное положение прямой пересечения этой плоскости с бесконечно близкой плоскостью семейства, а точка ребра возврата на данной плоскости семейства может быть получена как предельное положение точки пересечения данной плоскости и двух бесконечно близких к ней плоскостей семейства.

Примеры. Рассмотрим в заключение несколько интересных примеров огибающих семейства плоскостей, связанных с произвольно выбранной пространственной кривой. Пусть попрежнему $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — уравнение этой кривой, отнесенное к дуге s как параметру, а $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ — векторы основного трехгранника, рассматриваемые как функции от s.

1. Семейство соприкасающихся плоскостей. Уравнение соприкасающейся плоскости в произвольной точке s нашей кривой мы запишем как уравнение плоскости, проходящей через точку $\mathbf{r}(s)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{b}(s)$:

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(s))\,\mathbf{b}(s) = 0.$$

Здесь уравнение дано в сокращенной векторной записи, причем под $\mathbf{R}$ мы понимаем радиус-вектор произвольной точки плоскости:

$$\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k},$$

где X, Y, Z — текущие координаты. Так как в уравнении участвует параметр s, то мы имеем здесь целое семейство соприкасающихся плоскостей, взятых для любой точки кривой. Найдем прежде всего характеристики. Для этого к уравнению семейства присоединим результат его диференцирования по s. Получим

$$-\mathbf{r}'(s)\,\mathbf{b}(s) + (\mathbf{R} - \mathbf{r}(s))\,\mathbf{b}'(s) = 0 \quad \text{или} \quad (\mathbf{R} - \mathbf{r}(s))\,\mathbf{n}(s) = 0,$$

так как $\mathbf{r}'(s) = \mathbf{t}(s) \perp \mathbf{b}(s)$ и $\mathbf{b}'(s) = -\varkappa(s)\,\mathbf{n}(s)$ (мы считаем $\varkappa(s) \neq 0$).

Мы видим теперь, что $\mathbf{R} - \mathbf{r}(s)$ перпендикулярно $\mathbf{b}(s)$ и $\mathbf{n}(s)$ одновременно и, следовательно, направлено по $\mathbf{t}(s)$; *характеристика при каждом значении s совпадает с соответствующей касательной к кривой.* Наконец, для получения точек ребра возврата присоединяем третье уравнение, которое получится из второго, т. е. из

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}(s))\,\mathbf{n}(s) = 0$$

диференцированием снова по s:

$$-\mathbf{r}'(s)\,\mathbf{n}(s) + (\mathbf{R} - \mathbf{r}(s))\,(\varkappa(s)\,\mathbf{b}(s) - k(s)\,\mathbf{t}(s)) = 0.$$

Так как $\mathbf{r}'(s) = \mathbf{t}(s) \perp \mathbf{n}(s)$, то первый член отпадает. Комбинируя это уравнение с ранее полученными, мы видим, что $\mathbf{R} - \mathbf{r}(s)$ дает нуль в скалярном произведении со всеми тремя векторами $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ и, следовательно, сам обращается в нуль. Итак, для точки ребра возврата

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(s),$$

т. е. она совпадает с соответствующей точкой кривой. *Ребром возврата служит исходная кривая.*

2. Семейство нормальных плоскостей.

Уравнение нормальной плоскости как плоскости, проходящей через точку $\mathbf{r}(s)$ перпендикулярно $\mathbf{t}(s)$, имеет вид

$$(\mathbf{R}-\mathbf{r}(s))\,\mathbf{t}(s)=0.$$

При переменном s мы имеем здесь семейство нормальных плоскостей. Присоединяем для отыскания характеристик второе уравнение, полученное диференцированием по s:

$$-\mathbf{r}'(s)\,\mathbf{t}(s)+(\mathbf{R}-\mathbf{r}(s))\,\mathbf{t}'(s)=0,\ \text{т. е.}\ -1+(\mathbf{R}-\mathbf{r}(s))\,k(s)\,\mathbf{n}(s)=0.$$

Отсюда легко вывести, что точки R расположены на прямой, параллельной $\mathbf{b}(s)$ и проходящей через центр кривизны $\mathbf{r}(s)+\frac{1}{k(s)}\,\mathbf{n}(s)$. Другими словами, характеристика при каждом значении s совпадает *с осью кривизны.* Следовательно, оси кривизны пространственной кривой образуют некоторую развертывающуюся поверхность, огибающую семейство нормальных плоскостей. Чтобы отыскать ребро возврата, которого касаются все оси кривизны, нужно присоединить третье уравнение, полученное новым диференцированием по s. Но соответствующая выкладка была фактически проведена в § 32, при выводе формул (296), где она приводила нас к отысканию радиуса-вектора $\mathbf{r}_s$ для центра соприкасающейся сферы. В данном случае совершенно аналогичные формулы получатся для вектора R, так что *ребро возврата совпадает с геометрическим местом центров соприкасающихся сфер.*

3. Семейство спрямляющих плоскостей.

Имеем

$$(\mathbf{R}-\mathbf{r}(s))\,\mathbf{n}(s)=0.$$

Соответствующая выкладка легко приводит нас к выводу, что характеристики будут совпадать с *мгновенными осями вращения* трехгранника t, n, b. Образованная ими развертывающаяся поверхность называется *спрямляющей.* Название это объясняется тем, что после развертывания этой поверхности на плоскость исходная кривая обратится в *прямую.*

§ 51. Развертывающаяся поверхность как поверхность нулевой гауссовой кривизны.

Пусть дана произвольная линейчатая поверхность. В каждой ее точке направление образующей будет служить *асимптотическим направлением,* т. е. кривизна нормального сечения в этом направлении равна нулю. Действительно, плоскость, проведенная через нормаль и направление образующей в данной точке поверхности, очевидно, пересекается с поверхностью по образующей, которая и служит нормальным сечением. Кривизна его как прямой линии равна нулю. Таким

образом образующие линейчатой поверхности дают одно из двух семейств асимптотических линий на ней.

Проверим этот результат выкладкой. Воспользуемся параметрическим представлением линейчатой поверхности (464)

$$\mathbf{r} = \rho(u) + v\,\mathbf{l}(u).$$

Вычислим вторые частные производные радиуса-вектора по u, v:

$$\mathbf{r}_{uu} = \rho'' + v\mathbf{l}'', \quad \mathbf{r}_{uv} = \mathbf{l}', \quad \mathbf{r}_{vv} = 0. \tag{493}$$

Учтем также, что единичный вектор по нормали можно получить, разделив нормальный вектор (466) на его модуль (всегда равный $\sqrt{EG - F^2}$):

$$\mathbf{m} = \frac{[\rho', \mathbf{l}] + v[\mathbf{l}', \mathbf{l}]}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Отсюда, по формулам (359), определяющим коэфициенты второй квадратичной формы, получаем

$$\left.\begin{aligned} L &= \mathbf{r}_{uu}\mathbf{m} = \frac{Av^2 + Bv + C}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ M &= \mathbf{r}_{uv}\mathbf{m} = \frac{D}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ N &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{494}$$

где коэфициенты A, B, C, D имеют, очевидно, следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} A &= (\mathbf{l}''\mathbf{l}'\mathbf{l}), \quad B = (\rho''\mathbf{l}'\mathbf{l}) + (\mathbf{l}''\rho'\mathbf{l}), \\ C &= (\rho''\rho'\mathbf{l}), \quad D = (\mathbf{l}'\rho'\mathbf{l}), \end{aligned}\right\} \tag{495}$$

и, следовательно, зависят только от u. Диференциальное уравнение

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0,$$

определяющее асимптотические линии, примет теперь вид (после откидывания знаменателя $\sqrt{EG - F^2}$)

$$(Av^2 + Bv + C)\,du^2 + 2D\,du\,dv = 0,$$

$$[(Av^2 + Bv + C)\,du + 2D\,dv]\,du = 0.$$

Отсюда или

$$du = 0,$$

что дает нам в качестве одного семейства асимптотических линий координатные линии v, т. е. образующие; или

$$(Av^2 + Bv + C)\,du + 2D\,dv = 0, \tag{496}$$

что определяет нам второе семейство асимптотических линий.

Здесь следует различать два случая.

Косая (т. е. неразвертывающаяся) линейчатая поверхность. Так как необходимым и достаточным признаком раз-

вертывающейся поверхности служит компланарность векторов $\mathbf{l}$, $\mathbf{l}'$, $\boldsymbol{\rho}'$ [см. (468)], т. е. обращение в нуль смешанного произведения этих векторов, то в нашем случае это смешанное произведение отлично от нуля и, следовательно,

$$D \neq 0.$$

Диференциальное уравнение (496) оказывается уравнением типа Риккати:

$$\frac{dv}{du} + \frac{A}{2D} v^2 + \frac{B}{2D} v + \frac{C}{2D} = 0.$$

Решения этого уравнения

$$v = v(u)$$

дают уравнения асимптотических линий второго семейства. По известным свойствам уравнения Риккати любые четыре его решения

$$v_1(u), \quad v_2(u), \quad v_3(u), \quad v_4(u)$$

образуют постоянное „ангармоническое отношение“:

$$\frac{v_3(u) - v_1(u)}{v_3(u) - v_2(u)} : \frac{v_4(u) - v_1(u)}{v_4(u) - v_2(u)} = \text{const.}$$

Геометрически это означает, что, пересекая какую-нибудь четверку асимптотических второго семейства всевозможными образующими, мы получаем на каждой из образующих четверку точек, ангармоническое отношение которых будет иметь одно и то же значение. Действительно, $v_1(u)$, $v_2(u)$, $v_3(u)$, $v_4(u)$ при данном значении u суть координаты четырех точек на соответствующей образующей, в которых она встречается с четырьмя асимптотическими линиями.

Отметим еще, что для линейчатой поверхности гауссова кривизна имеет вид

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-D^2}{(EG - F^2)^2}. \tag{497}$$

Мы воспользовались здесь формулами (494). В нашем случае неразвертывающейся поверхности, когда $D \neq 0$, мы получаем гауссову кривизну существенно отрицательной. Это видно впрочем уже из того, что поверхность содержит два семейства асимптотических линий.

Теперь рассмотрим другой возможный случай.

Развертывающаяся поверхность. В этом случае в силу признака (468) у нас $D = 0$, уравнение (496) дает тоже

$$du = 0,$$

и оба семейства асимптотических совпадают. Это возможно лишь в случае 3 § 45, так что асимптотические (образующие) суть в то же время линии кривизны одного семейства и

$$K = 0; \tag{498}$$

мы получаем, следовательно, поверхность нулевой гауссовой кривизны. Также из формулы (497) непосредственно видно, что из $D = 0$ следует $K = 0$.

Итак, *развертывающиеся поверхности выделяются среди линейчатых обращением в нуль гауссовой кривизны.* Мы покажем, что *не только среди линейчатых, но и среди всевозможных поверхностей, развертывающиеся поверхности тождественны с поверхностями нулевой гауссовой кривизны.*

Итак, пусть дана поверхность, на которой гауссова кривизна K равна нулю. Тогда, как мы знаем (конец § 45), на поверхности имеется лишь одно семейство асимптотических, совпадающее с одним из двух семейств линий кривизны. Поэтому вдоль всякой асимптотической линии, являющейся в то же время линией кривизны, соблюдаются формулы Родрига (390):

$$d\mathbf{m} = -\tilde{k}\, d\mathbf{r},$$

где $\tilde{k}$ — главная кривизна, отвечающая направлению касательной к асимптотической линии. Но это направление, по определению асимптотической линии, есть асимптотическое, т. е. кривизна $\tilde{k}$ нормального сечения, взятого в этом направлении, есть нуль. Итак, вдоль асимптотической линии

$$\tilde{k} = 0$$

и, следовательно,

$$d\mathbf{m} = 0; \quad \mathbf{m} = \mathbf{m}_0 = \text{const}.$$

Единичный нормальный вектор $\mathbf{m}$ остается постоянным вдоль асимптотической линии, и, следовательно, нормали к поверхности во всех точках асимптотической линии параллельны между собой. Более того, нетрудно показать, что плоскости, касательные к поверхности в точках асимптотической линии, все совпадают между собой.

В самом деле, рассмотрим вдоль асимптотической линии скалярное произведение $\mathbf{rm}_0$. Дифференциал его, в силу постоянства $\mathbf{m}_0$, имеет вид $\mathbf{m}_0\, d\mathbf{r}$ и равен нулю, так как $d\mathbf{r}$ направлено по касательной к асимптотической линии и, следовательно, перпендикулярно к $\mathbf{m}_0$. Итак, $\mathbf{rm}_0$ остается постоянным. Пусть $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор какой-либо фиксированной точки M_0 асимптотической линии. Тогда

$$\mathbf{rm}_0 = \mathbf{r}_0\mathbf{m}_0 \text{ и, следовательно, } (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\,\mathbf{m}_0 = 0.$$

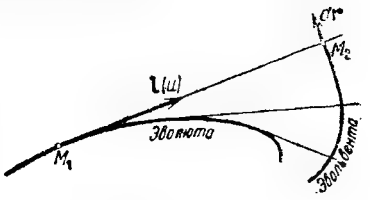
Отсюда следует, что вектор $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, соединяющий фиксированную точку M_0 на асимптотической линии с ее произвольной точкой, перпендикулярен к $\mathbf{m}_0$ и лежит, следовательно, в касательной плоскости в точке M_0. Таким образом асимптотическая линия всеми своими точками лежит в касательной плоскости в точке M_0. В результате эта плоскость, заключая асимптотическую линию и будучи перпендикулярна постоянному вдоль нее нормальному вектору $\mathbf{m}_0$, будет служить касательной плоскостью во всех ее точках.

Так как асимптотические линии образуют семейство от одного параметра и каждой из них отвечает единственная касательная плоскость, то рассматриваемая поверхность обладает семейством касательных плоскостей от *одного параметра*, для которого она является, оче-

видно, огибающей. На основании доказанного в § 50 мы знаем, что тем самым поверхность будет и развертывающейся. Наша цель достигнута: доказано, что *для того чтобы поверхность была развертывающейся, необходимо и достаточно, чтобы ее гауссова кривизна K была равна нулю.*

§ 52. Ортогональные траектории развертывающихся поверхностей.

Из двух взаимно ортогональных семейств линий кривизны, которые имеются на каждой поверхности, в случае развертывающейся поверхности одно превращается в семейство прямолинейных образующих, а другое — в семейство их ортогональных траекторий, т. е. кривых, встречающих все образующие под прямым углом.



Черт. 108.

Если даны две пространственные кривые, точки которых можно поставить во взаимно однозначное соответствие так, что *каждая касательная к первой кривой является нормалью в соответствующей точке второй кривой,* то первая кривая называется *эволютой* по отношению ко второй, а вторая — *эвольвентой* по отношению к первой (черт. 108).

Очевидно, что то же самое может быть формулировано и так: *эволюта и эвольвента — это соответственно ребро возврата и некоторая ортогональная траектория какой-нибудь развертывающейся поверхности.*

Действительно, касательные к эволюте образуют некоторую развертывающуюся поверхность, для которой эволюта является, таким образом, ребром возврата и на которой эвольвента, имея образующие своими нормалями, служит ортогональной траекторией.

Обратно, на всякой развертывающейся поверхности ортогональная траектория пересекает образующие под прямым углом и имеет их, следовательно, своими нормалями; для ребра же возврата образующие служат, как мы знаем, касательными в соответствующих точках.

Итак, второе определение эквивалентно первому, и только лишь в случае плоских кривых предпочтительнее первое (вполне совпадающее с ранее известным). Действительно, развертывающаяся поверхность, о которой идет речь во втором определении, оказывается в этом случае плоской и ее образующие становятся неопределенными.

Мы рассмотрим теперь две задачи.

1. По данной эволюте (ребру возврата) найти эвольвенту (ортогональную траекторию).

Пусть уравнение ребра возврата будет

$$\rho = \rho(u).$$

При образовании развертывающейся поверхности мы примем ребро возврата за направляющую кривую; тогда вектор-функция $\mathbf{l}(u)$, ука-

зывающая направления образующих, совпадает с единичным касательным вектором к ребру возврата, так что

$$\mathbf{l}(u) = \mathbf{t}(u) = \frac{d\rho(u)}{ds(u)} \quad \text{или} \quad d\rho(u) = \mathbf{l}(u)\, ds(u). \tag{499}$$

где $s(u)$ — длина дуги, отсчитываемая вдоль ребра возврата в сторону возрастания u.

Вводим криволинейные координаты u, v обычным для линейчатой поверхности путем (§ 47) и ищем уравнение ортогональной траектории в виде

$$v = v(u). \tag{500}$$

Так как радиус-вектор произвольной точки поверхности имеет вид (464), то вдоль кривой (500) мы имеем

$$\mathbf{r} = \rho(u) + v(u)\,\mathbf{l}(u),$$

отсюда

$$d\mathbf{r} = d\rho + \mathbf{l}\,dv + v\,d\mathbf{l}$$

или, заменяя $d\rho$ согласно (499):

$$d\mathbf{r} = \mathbf{l}(ds + dv) + v\,d\mathbf{l}.$$

Потребуем теперь, чтобы вектор $d\mathbf{r}$, касательный к рассматриваемой кривой, был при каждом значении u перпендикулярен к соответствующей образующей, т. е. к вектору $\mathbf{l}(u)$.

Дифференциал $d\mathbf{l}$ единичного вектора $\mathbf{l}$ перпендикулярен $\mathbf{l}$; поэтому остается потребовать, чтобы обращалась в нуль составляющая по $\mathbf{l}$, т. е. чтобы

$$ds(u) + dv(u) = 0.$$

Интегрируя это соотношение, получаем

$$v(u) = C - s(u), \tag{501}$$

где C — произвольное постоянное. В результате мы получаем семейство кривых, каждая из которых есть ортогональная траектория развертывающейся поверхности и, следовательно, эвольвента по отношению к ребру возврата.

Уравнение (501) показывает, что при движении по ребру возврата отрезок образующей M_1M_2 (черт. 108), численно выражаемый функцией $v(u)$, уменьшается на столько, на сколько увеличивается $s(u)$ — длина дуги, отсчитываемая по ребру возврата.

Далее, если

$$v = v_1(u) \quad \text{и} \quad v = v_2(u)$$

— уравнения двух ортогональных траекторий, то согласно (501)

$$v_1(u) = C_1 - s(u), \quad v_2(u) = C_2 - s(u),$$

откуда

$$v_2(u) - v_1(u) = C_2 - C_1.$$

Итак, отрезок образующей между двумя ортогональными траекториями сохраняет постоянную длину.

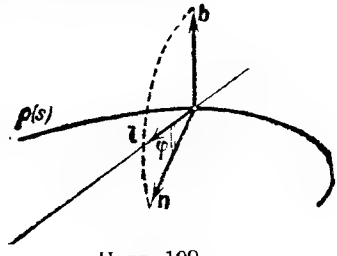
2. По данной эвольвенте (ортогональной траектории) найти эволюту (ребро возврата).

Пусть уравнение данной кривой в пространстве будет

$$\rho = \rho(s), \tag{502}$$

где s — длина дуги.

Требуется построить развертывающуюся поверхность, для которой данная кривая будет служить ортогональной траекторией; тогда для ребра возврата этой поверхности данная кривая сама собой будет служить эвольвентой. Примем (502) за направляющую кривую искомой поверхности (см. начало § 47); так как образующие последней должны ортогонально пересекать кривую (502), то вектор $\mathbf{l}(s)$ должен быть при каждом значении s направлен по нормали к этой кривой. Поэтому $\mathbf{l}(s)$ лежит в плоскости векторов $\mathbf{n}(s)$ и $\mathbf{b}(s)$. Обозначая через $\varphi(s)$ угол, образуемый $\mathbf{l}(s)$ с $\mathbf{n}(s)$ (черт. 109), можно искать вдоль кривой единичный вектор $\mathbf{l}$ в виде



Черт. 109.

$$\mathbf{l} = \mathbf{n}\cos\varphi + \mathbf{b}\sin\varphi. \tag{503}$$

Потребуем теперь, чтобы линейчатая поверхность с направляющей линией $\rho(s)$ и образующими, идущими по $\mathbf{l}(u)$, была развертывающейся. Согласно § 47 для этого необходима и достаточна компланарность векторов ρ', $\mathbf{l}$, $\mathbf{l}'$, т. е. в нашем случае векторов $\mathbf{t}$, $\mathbf{l}$, $\frac{d\mathbf{l}}{ds}$.

Дифференцируя разложение $\mathbf{l}$ (503), получим

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{l}}{ds} &= \frac{d\mathbf{n}}{ds}\cos\varphi - \mathbf{n}\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{ds} + \frac{d\mathbf{b}}{ds}\sin\varphi + \mathbf{b}\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{ds} = \\ &= (\varkappa\mathbf{b} - k\mathbf{t})\cos\varphi - \mathbf{n}\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{ds} - \varkappa\mathbf{n}\sin\varphi + \mathbf{b}\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{ds} = \\ &= -k\cos\varphi\cdot\mathbf{t} + \left(\frac{d\varphi}{ds} + \varkappa\right)(-\sin\varphi\cdot\mathbf{n} + \cos\varphi\cdot\mathbf{b}).\end{aligned} \tag{503'}$$

Очевидно, линейная зависимость полученного вектора от векторов $\mathbf{t}$, $\mathbf{l}$ имеет место в том и только в том случае, если

$$\frac{d\varphi}{ds} + \varkappa = 0. \tag{504}$$

Действительно, если (504) имеет место, то в выражении $\frac{d\mathbf{l}}{ds}$ остается только член, параллельный $\mathbf{t}$, так что линейная зависимость налицо. Напротив, если $\frac{d\varphi}{ds} + \varkappa \neq 0$, то в выражении $\frac{d\mathbf{l}}{ds}$ имеется еще член, параллельный вектору

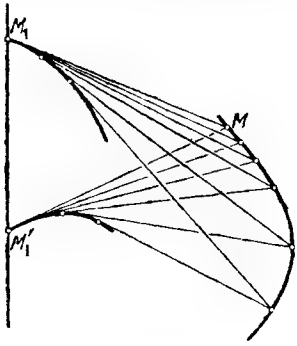
$$-\sin\varphi\cdot\mathbf{n} + \cos\varphi\cdot\mathbf{b}$$

и, следовательно, ортогональный и к t, и к l [что легко проверить, пользуясь выражением (503)]. В этом случае линейная зависимость от t и l не может, очевидно, иметь места.

Итак, *для того чтобы построенная нами линейчатая поверхность была развертывающейся, необходимо и достаточно соблюдение условия* (504), *которое можно переписать в виде*

$$d\varphi = -\varkappa(s)\,ds \quad \text{или} \quad \varphi = -\int \varkappa(s)\,ds. \tag{505}$$

При интегрировании здесь войдет произвольная постоянная, так что допустимых функций $\varphi(s)$ будет бесчисленное множество, причем все они друг от друга отличаются постоянными слагаемыми.



Черт. 110.

В соответствии с этим можно построить бесчисленное множество развертывающихся поверхностей, для которых исходная кривая $\rho(s)$ служит ортогональной траекторией. А именно, любая из этих поверхностей образуется нормалями, проведенными в каждой точке кривой $\rho(s)$ по направлению вектора (503), т. е. под углом $\varphi(s)$ к главной нормали. При этом $\varphi(s)$ определяется уравнением (505). Если от одной такой поверхности перейти к другой, то $\varphi(s)$ может измениться лишь на постоянное; следовательно, все нормали кривой, служащие образующими поверхности, повернутся на один и тот же угол, каждая в своей нормальной плоскости (черт. 110).

Отсюда следует, что *если две развертывающиеся поверхности имеют общую ортогональную траекторию, то их образующие встречаются на ней под постоянным углом.*

Обратно, *если образующие развертывающейся поверхности в точках, где они встречаются с какой-нибудь ортогональной траекторией, повернуть все на один и тот же угол в плоскостях, нормальных к траектории, то в новых положениях они опять образуют развертывающуюся поверхность.* Это также непосредственно следует из предыдущих рассуждений, так как при добавлении к функции $\varphi(s)$ постоянного слагаемого она попрежнему удовлетворяет условию (505) и, следовательно, посредством вектора (503) попрежнему определяет развертывающуюся поверхность.

Итак, мы умеем построить для каждой пространственной кривой всевозможные развертывающиеся поверхности, для которых данная кривая служит ортогональной траекторией. Для этого достаточно принять данную кривую $\rho(s)$ за направляющую и провести через каждую ее точку M образующую по направлению вектора

$$\mathbf{l}(s) = \mathbf{n}\cos\varphi + \mathbf{b}\sin\varphi, \quad \text{где} \quad \varphi = -\int \varkappa(s)\,ds.$$

Найдем теперь ребро возврата для какой-нибудь из этих поверхностей (на черт. 110 и 111 изображены два таких ребра возврата). Для этого воспользуемся результатами § 48. Параметрическое представление ребра возврата искалось там в виде (469); в нашем случае мы запишем то же самое в виде

$$\mathbf{r}(s) = \boldsymbol{\rho}(s) + v(s)\,\mathbf{l}(s). \tag{506}$$

В результате исследования, проведенного в § 48, оказалось, что $v(s)$ должно определяться из уравнения (472)

$$1 + v\beta = 0, \tag{507}$$

где β — коэфициент разложения (471), которое в нашем случае мы перепишем в виде

$$\frac{d\mathbf{l}}{ds} = \alpha\mathbf{l} + \beta\mathbf{t}, \quad \text{где} \quad \mathbf{t} = \frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds}.$$

Но это разложение $\frac{d\mathbf{l}}{ds}$ у нас уже фактически было получено в виде (503′); так как при этом соблюдается условие (504), то мы имеем

$$\frac{d\mathbf{l}}{ds} = -k\cos\varphi\cdot\mathbf{t}.$$

Следовательно, в нашем случае

$$\alpha = 0, \quad \beta = -k\cos\varphi.$$

Вставляя выражение $\beta(s)$ в (507), получаем

$$1 - vk\cos\varphi = 0, \quad \text{откуда} \quad v = R\frac{1}{\cos\varphi}, \tag{508}$$

где $R = \frac{1}{k}$ есть радиус кривизны исходной кривой $\boldsymbol{\rho}(s)$. Вставляя полученное выражение $v(s)$, а также разложение $\mathbf{l}(s)$ в уравнение (506), мы получаем уравнение ребра возврата в виде

$$\mathbf{r}(s) = \boldsymbol{\rho}(s) + R\frac{\mathbf{n}\cos\varphi + \mathbf{b}\sin\varphi}{\cos\varphi} = \boldsymbol{\rho} + R\mathbf{n} + \mathbf{b}R\operatorname{tg}\varphi. \tag{509}$$

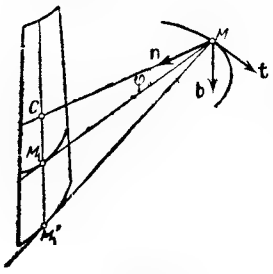
Все величины, стоящие в правой части, являются функциями s, причем функция φ определена с точностью до постоянного слагаемого согласно (505).

Формула (509) *позволяет по заданной наперед кривой* $\boldsymbol{\rho}(s)$ (*эвольвенте*) *найти эволюту*, т. е. ребро возврата развертывающейся поверхности, имеющей данную кривую своей ортогональной траекторией. Этих эволют будет бесчисленное множество, так как $\varphi(s)$ включает произвольное постоянное слагаемое.

Геометрически мы попадаем из точки M на кривой $\boldsymbol{\rho}(s)$ в соответствующую точку M_1 на ее эволюте, сместившись сначала на вектор $R\mathbf{n}$, что приводит нас в центр кривизны C, и после этого сместившись

на вектор $\mathbf{b}R\operatorname{tg}\varphi$, т. е. параллельно бинормали, и, следовательно, вдоль *оси кривизны*. Мы останавливаемся в некоторой точке M_1 на оси кривизны так, что направление MM_1 образует с главной нормалью MC угол φ (черт. 111).

Когда точка M движется по кривой $\rho(s)$, то точка M_1 описывает одну из эволют этой кривой. Так как при этом ось кривизны описывает развертывающуюся поверхность (см. конец § 50), то все эволюты расположатся на этой поверхности. При этом через каждую точку M_1 этой поверхности проходит одна и только одна эволюта. Действительно, произвольное постоянное в интеграле (505) всегда можно подобрать так, чтобы при каком-нибудь заданном значении $s = s_0$ функция $\varphi(s)$ приобрела любое наперед заданное значение; в связи с этим можно добиться, чтобы вектор (509) при заданном значении $s = s_0$ указал своим концом в любую наперед заданную точку на соответствующей оси кривизны. Меняя далее s, мы получим эволюту, проходящую через любую наперед заданную точку на заданной оси кривизны, отвечающей $s = s_0$, т. е. через любую точку поверхности осей кривизны.



Черт. 111.

Итак, эволюты располагаются на развертывающейся поверхности осей кривизны, целиком ее заполняя; при этом их касательные в соответствующих точках M_1 и M_1' (черт. 111) сходятся на эвольвенте в точке M *под постоянным углом* M_1MM_1'. Нормальная плоскость к эвольвенте касается вдоль оси кривизны CM_1 развертывающейся поверхности осей кривизны.

В частности, *плоская кривая*, если ее рассматривать в пространстве, обладает, кроме известной нам из главы III *плоской эволюты*, еще бесчисленным множеством *пространственных эволют*. Они все расположатся на развертывающейся поверхности осей кривизны, которая будет в данном случае цилиндрической. Действительно, оси кривизны плоской кривой суть перпендикуляры к ее плоскости, проведенные через точки ее плоской эволюты. Все свойства, доказанные в общей теории, сохраняются, конечно, и здесь.

§ 53. Геометрические свойства линий кривизны.

С развертывающимися поверхностями связана геометрическая характеристика линий кривизны на *любой* поверхности. До сих пор линии кривизны определялись у нас как кривые, в каждой своей точке касающиеся главного направления поверхности в этой точке. Теперь мы можем доказать следующую теорему:

Для того чтобы кривая на поверхности была линией кривизны, необходимо и достаточно, чтобы вдоль этой кривой нормали к поверхности образовывали развертывающуюся поверхность.

Пусть на поверхности дана какая-нибудь кривая, уравнение которой пусть будет

$$\rho = \rho(s).$$

В каждой точке этой кривой берем нормаль к поверхности; она идет по направлению единичного нормального вектора $\mathbf{m}$, который вдоль кривой также является функцией ее параметра

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(s).$$

Построенные нами нормали образуют линейчатую поверхность, для которой кривую $\rho(s)$ можно рассматривать как направляющую, а $\mathbf{m}(s)$ играет роль вектор-функции $\mathbf{l}(s)$ (см. § 47).

Допустим, что кривая $\rho(s)$ на исходной поверхности есть линия кривизны. Тогда вдоль этой кривой соблюдается формула Родрига (390)

$$d\mathbf{m} = -\tilde{k}\, d\rho,$$

или, что то же,

$$\mathbf{m}'(s) = -\tilde{k}(s)\,\rho'(s), \tag{510}$$

где $\tilde{k}(s)$ — соответствующая главная кривизна поверхности, рассматриваемая как функция параметра s вдоль линии кривизны.

Из § 47 [формула (468)] мы знаем, что компланарность векторов $\mathbf{m}(s)$, $\mathbf{m}'(s)$, $\rho'(s)$ является в нашем случае необходимым и достаточным признаком того, что построенная линейчатая поверхность нормалей будет развертывающейся. Но (510) показывает, что $\mathbf{m}'(s)$ параллельно $\rho'(s)$. Следовательно, компланарность $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}'$, ρ' заведомо имеет место, и поверхность нормалей развертывающаяся.

Найдем, между прочим, ребро возврата этой развертывающейся поверхности. Согласно § 48 ищем уравнение ребра возврата в виде (469)

$$\mathbf{r} = \rho(s) + v(s)\,\mathbf{m}(s), \tag{511}$$

причем $v(s)$ определяется из уравнения (472)

$$1 + v\beta = 0.$$

Здесь β есть коэфициент при ρ' в разложении $\mathbf{m}'$ по $\mathbf{m}$ и ρ'. Но (510) показывает, что этот коэфициент равен $-\tilde{k}(s)$; следовательно,

$$1 - v\tilde{k} = 0, \quad v = \tilde{R},$$

где $\tilde{R}$ есть главный радиус кривизны, т. е. $\frac{1}{\tilde{k}}$.

Вставляя в (511) значение v, получаем уравнение ребра возврата в виде

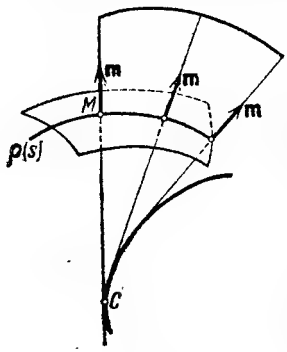
$$\mathbf{r} = \rho(s) + \tilde{R}(s)\,\mathbf{m}(s). \tag{512}$$

Таким образом (черт. 112) вектор MC, соединяющий точку M линии кривизны на поверхности с соответствующей точкой C ребра возврата, имеет вид

$$MC = \widetilde{R}\mathbf{m}.$$

Другими словами, отрезок нормали MC равен главному радиусу кривизны $\widetilde{R}$ по модулю; при этом он направлен в сторону $\pm\mathbf{m}$, в зависимости от знака у главного радиуса кривизны $\widetilde{R}$.

Итак, каждая линия кривизны на поверхности сопровождается кривой в пространстве, касательные к которой являются нормалями к поверхности вдоль линии кривизны (если оставить в стороне случаи вырождения ребра возврата).



Черт. 112.

Взятые для всех линий кривизны на данной поверхности, эти ребра возврата в свою очередь образуют поверхность (так называемую поверхность центров), состоящую из двух полостей; каждая полость отвечает одному семейству линий кривизны.

Вернемся к кривой $\rho(s)$ на исходной поверхности и допустим теперь, что нормали к поверхности, взятые вдоль кривой $\rho(s)$, образуют развертывающуюся поверхность. В таком случае необходимо соблюдается условие (468) § 47 и, следовательно, векторы

$$\mathbf{m}(s), \quad \mathbf{m}'(s), \quad \rho'(s)$$

должны быть компланарны при каждом значении s. Но ρ' как касательный к поверхности вектор ортогонален к $\mathbf{m}$; далее $\mathbf{m}'$ как производная единичного вектора $\mathbf{m}$ также ортогонален к $\mathbf{m}$. Следовательно, ρ' и $\mathbf{m}'$, находясь в одной плоскости с $\mathbf{m}$ и будучи к нему ортогональны, параллельны между собой:

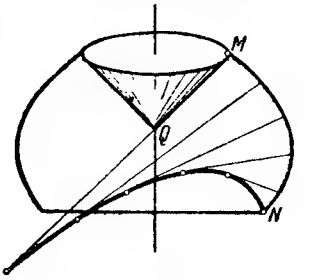
$$\mathbf{m}' \parallel \rho' \quad \text{или} \quad d\mathbf{m} \parallel d\rho.$$

Но при выводе формулы Родрига (390) было показано, что соблюдение такого условия достаточно для того, чтобы направление $d\rho$ было главным направлением в данной точке поверхности. Следовательно, в любой точке кривой $\rho(s)$ ее касательная, параллельная $d\rho$, направлена по главному направлению в этой точке, и кривая $\rho(s)$ есть линия кривизны. Формулированная выше теорема доказана.

В связи с этой теоремой приведем несколько примеров. Возьмем любую кривую на сфере (в предельном случае — на плоскости). Так как любая точка сферы есть точка закругления, то понятие о главных направлениях теряет смысл. Формально всякое направление можно считать главным, так как кривизна $\widetilde{k}$ нормального сечения по всем направлениям одна и та же и, следовательно, совпадает одновременно со своим максимальным и минимальным значениями. В связи с этим

любую кривую на сфере можно считать линией кривизны. Доказанная в этом параграфе теорема имеет место для любой кривой на сфере. Действительно, все нормали к сферической поверхности проходят через ее центр и, следовательно, нормали, взятые в точках любой кривой на сфере, образуют коническую (т. е. развертывающуюся) поверхность.

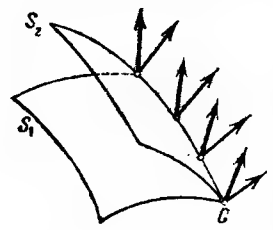
Рассмотрим еще в качестве очень наглядного примера линии кривизны на поверхности вращения. Мы утверждаем, что это будут меридианы и параллели. В самом деле, пусть поверхность образована вращением плоской дуги MN около оси, лежащей в той же плоскости α (черт. 113). Так как поверхность получится совершенно симметричной относительно плоскости чертежа, то нормаль к поверхности в точке M лежит в этой плоскости и пересекает ось вращения в точке Q (или параллельна оси). При вращении дуги MN около оси точка M описывает одну из параллелей, а прямая MQ прямой круглый конус (или цилиндр), оставаясь все время нормалью к поверхности в точках параллели. Таким образом нормали вдоль параллели образуют развертывающуюся поверхность, и параллели являются линиями кривизны.



Черт. 113.

Еще проще убедиться в том же самом для меридианов, например, для меридиана MN. Все нормали к поверхности вдоль MN лежат, как уже было замечено, в плоскости α и образуют, следовательно, развертывающуюся поверхность (плоскость).

Возвращаясь к общей теории, выведем важное следствие из теоремы этого параграфа. Пусть две поверхности S_1, S_2 пересекаются по кривой C, которая служит линией кривизны для каждой из них. Тогда нормали к каждой из двух поверхностей вдоль линии C образуют развертывающуюся поверхность, и мы имеем две развертывающиеся поверхности, для которых C служит общей ортогональной траекторией. Из результатов предыдущего параграфа следует, что образующие развертывающихся поверхностей, т. е. нормали к поверхностям S_1, S_2, встречаются вдоль кривой C под постоянным углом (черт. 114). Следовательно, касательные плоскости к S_1 и S_2 в точках кривой C также образуют между собой постоянный угол. Нами доказана теорема Иоахимсталя:



Черт. 114.

Две поверхности S_1 и S_2, имеющие общую линию кривизны C, пересекаются вдоль нее под постоянным углом.

Нетрудно доказать и обратную теорему:

Если две поверхности S_1 и S_2 пересекаются вдоль некоторой кривой C под постоянным углом и если C служит линией кривизны для S_1, то она будет линией кривизны и для S_2.

В самом деле, рассмотрим линейчатые поверхности, образованные нормалями к S_1 и S_2 вдоль кривой C. Так как C есть линия кривизны для S_1, то первая из этих поверхностей — развертывающаяся. Что же касается второй поверхности, то ее образующие (т. е. нормали к S_2) получены из образующих первой (т. е. из нормалей к S_1) поворотом их в нормальных к C плоскостях на *постоянный* угол (так как S_1 и S_2 встречаются вдоль C под постоянным углом). Как известно из предыдущего параграфа, при этих условиях вторая линейчатая поверхность будет тоже развертывающейся, и, следовательно, C будет линией кривизны и для поверхности S_2.

Примеры.

Доказанная теорема имеет ценные применения при отыскании линий кривизны в конкретных случаях. Так, например, если данная поверхность пересекается под постоянным углом с какой-нибудь сферой, то линия пересечения обязательно будет линией кривизны. Действительно, на сфере любую кривую, в том числе и линию пересечения, можно считать линией кривизны; следовательно, она будет линией кривизны и на данной поверхности. То же относится и к пересечению данной поверхности с какой-нибудь плоскостью.

В частности, отсюда следует, что на *каналовой поверхности* (см. конец § 49) ее круговые характеристики дают одно семейство линий кривизны; действительно, вдоль каждой характеристики каналовая поверхность касается одной из сфер огибаемого семейства, т. е. образует с этой сферой постоянный угол (равный нулю).

Обратно, всякая поверхность, обладающая одним семейством круговых линий кривизны, есть каналовая. Действительно, проведем через каждую круговую линию кривизны сферу, касающуюся поверхности хоть в одной точке; эту окружность, как и всякую кривую, на сфере можно считать тоже линией кривизны. Вдоль общей линии кривизны поверхность и сфера должны образовывать постоянный угол. Но этот угол в одной точке нуль, следовательно, он все время равен нулю, и построенная нами сфера касается поверхности вдоль всей круговой линии кривизны. Мы получаем семейство сфер, по одной для каждой круговой линии кривизны, огибающей которого служит данная поверхность.

§ 54. Сопряженные сети на поверхности.

Рассмотрим следующую задачу. На поверхности S взята произвольная кривая C. Требуется провести через каждую точку M кривой C прямую, касательную к поверхности, так, чтобы эти прямые образовали развертывающуюся поверхность. Тривиальное решение, когда берутся касательные к самой кривой C, мы оставим в стороне. Пусть $\boldsymbol{\rho}$ будет радиус-вектор произвольной точки M на кривой C, а $\mathbf{l}$ — единичный вектор, определяющий направление некоторой касательной к поверхности в точке M. Рассматривая кривую C как направляющую линию получаемой таким образом линейчатой поверхности, запишем условие (468), необходимое и достаточное для того, чтобы линейчатая поверхность была развертывающейся:

$$\mathbf{l},\ d\mathbf{l},\ d\boldsymbol{\rho} \text{ компланарны.}$$

Так как $\mathbf{l}$ и $d\boldsymbol{\rho}$ определяют в нашем случае касательную плоскость к поверхности в точке M, то условие можно переписать в виде

$d\mathbf{l}$ лежит в касательной плоскости,

или, что то же, вдоль кривой C соблюдается условие

$$d\mathbf{l}\,\mathbf{m} = 0, \tag{513}$$

где $\mathbf{m}$ — единичный нормальный вектор к поверхности.

Так как $\mathbf{l}$ — касательный к поверхности вектор, то он все время ортогонален к $\mathbf{m}$, так что вдоль кривой

$$\mathbf{l}\mathbf{m} = 0.$$

Дифференцируя, получим

$$d\mathbf{l}\,\mathbf{m} + \mathbf{l}\,d\mathbf{m} = 0,$$

откуда видно, что условие (513) равносильно следующему:

$$\mathbf{l}\,d\mathbf{m} = 0. \tag{514}$$

Этим поставленная задача решена. *Для того чтобы касательные к поверхности, взятые вдоль данной кривой C, образовывали развертывающуюся поверхность, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке M на C соответствующая касательная была направлена по вектору* $\mathbf{l}$, *ортогональному к* $d\mathbf{m}$ (где $d\mathbf{m}$ — дифференциал единичного нормального вектора $\mathbf{m}$ вдоль кривой C).

Как мы видим, направление вектора $\mathbf{l}$ в каждой точке и, следовательно, искомая развертывающаяся поверхность определяются единственным образом. Действительно, вектор $\mathbf{l}$ ортогонален к $d\mathbf{m}$, лежащему в касательной плоскости, и вектору $\mathbf{m}$, нормальному к поверхности; этим направление $\mathbf{l}$ вполне определяется с точностью до замены на обратное. Исключением служит случай, когда вдоль C все время $d\mathbf{m} = 0$; последнее означает, что кривая C плоская, причем во всех точках кривой C ее плоскость служит касательной плоскостью к поверхности. Тогда $\mathbf{l}$ можно выбирать в касательной плоскости как угодно, все равно получаем развертывающуюся поверхность, а именно плоскость кривой C.

Возвращаясь к общему случаю, заметим, что касательная плоскость в точке M будет общей для исходной поверхности S и для построенной развертывающейся поверхности. Действительно, вектор $\mathbf{l}$ будет, очевидно, касательным к обеим поверхностям, и вектор $d\mathbf{r}$ — тоже, так как кривая C, которой $d\mathbf{r}$ касается, лежит на обеих поверхностях. Векторы $\mathbf{l}$ и $d\mathbf{r}$ (не параллельные по предположению) определяют, следовательно, общую касательную плоскость.

Таким образом *касательные плоскости к исходной поверхности S в точках M кривой C служат касательными плоскостями и к построенной развертывающейся поверхности вдоль соответствующих образующих.*

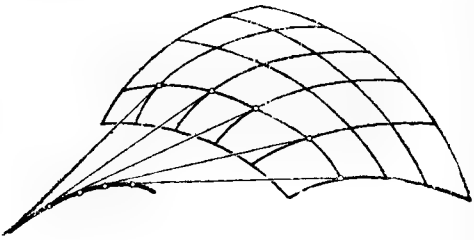
Другими словами, построенную развертывающуюся поверхность можно рассматривать как *огибающую семейства касательных плоскостей к поверхности S в точках кривой C.*

Вспомним теперь о введенном ранее понятии *сопряженности* двух касательных направлений в данной точке поверхности. Если $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{m}$ — дифференциалы радиуса-вектора и единичной нормали при смеще-

нии по одному направлению, а $\delta\mathbf{r}$ и $\delta\mathbf{m}$ — при смещении по другому, то направления назывались сопряженными, если $d\mathbf{m}$ было ортогонально $\delta\mathbf{r}$ или $\delta\mathbf{m}$ ортогонально $d\mathbf{r}$. Оба эти условия эквивалентны, так как оба они могут быть записаны в виде (395)

$$d\mathbf{m}\,\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{m}\,d\mathbf{r} = L\,du\,\delta u + M\,du\,\delta v + M\,dv\,\delta u + N\,dv\,\delta v = 0. \quad (515)$$

Итак, сопряженность одного касательного направления другому означает ортогональность последнего диференциалу $d\mathbf{m}$ при смещении по первому направлению. Мы видим теперь, что условие (514), определяющее направление вектора $\mathbf{l}$ в каждой точке кривой C, означает его сопряженность направлению самой этой кривой.



Черт. 115.

Итак, *для того чтобы касательные к поверхности S, взятые по одной в каждой точке кривой C, образовывали развертывающуюся поверхность, необходимо и достаточно, чтобы направления этих касательных были сопряжены с направлениями касательных к кривой C в каждой ее точке.*

Мы получили, таким образом, геометрическое истолкование понятия сопряженности.

Рассмотрим, наконец, *сопряженные сети* на поверхности. Под сетью вообще мы понимаем два семейства кривых на поверхности, каждое от одного параметра:

$$\omega_1(u, v) = C_1, \quad \omega_2(u, v) = C_2,$$

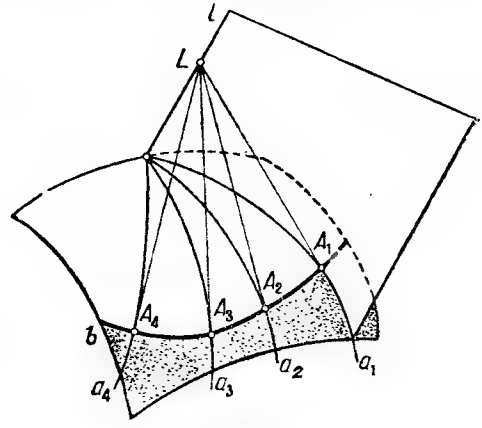
такие, что через каждую точку поверхности проходят две кривые сети, по одной из каждого семейства. Под сопряженной сетью мы понимаем такую сеть, что *в каждой точке поверхности проходящие через нее кривые сети имеют сопряженные направления касательных. Из геометрического истолкования сопряженности следует, что для этого необходимо и достаточно, чтобы вдоль каждой линии одного семейства касательные к линиям другого семейства образовывали развертывающуюся поверхность* (черт. 115).

Сопряженные сети можно строить на поверхность весьма разнообразными способами. Один геометрически очень наглядный способ дает теорема Кенигса.

Возьмем в пространстве произвольную прямую l (черт. 116) и будем проводить через нее всевозможные плоскости. Пересекая ими поверхность, мы получим на ней семейство кривых от одного параметра (на чертеже a_1, a_2, ...). Касательные к этим кривым, находясь в одной плоскости с прямой l, пересекаются с нею. Рассмотрим геометрическое место точек, взятых по одной на каждой из кривых a так, что касательные к кривым a в этих точках сходятся в данной

точке L на прямой l. Это геометрическое место мы будем называть *линией тени* (оно служит границей освещенной и неосвещенной частей поверхности, если источник света находится в точке L). Каждой точке L на прямой l, если из L можно проводить касательные к поверхности, будет отвечать своя линия тени, так что линии тени образуют также семейство от одного параметра. Покажем теперь — и в этом заключается теорема, — что линии тени совместно с плоскими сечениями a образуют сопряженную сеть.

В самом деле, касательные к кривым a, взятые вдоль какой-нибудь линии тени b, по самому построению сходятся в одной точке (на прямой l) и образуют, следовательно, коническую поверхность (частный случай развертывающейся). Следовательно, направления этих касательных к кривым a сопряжены с направлениями касательных к рассматриваемой линии тени b. А так как это имеет место для каждой линии тени, то и в любой точке поверхности линии a и b встречаются, имея сопряженные направления касательных. Мы получили сопряженную сеть.



Черт. 116.

Самый общий вид сопряженной сети на данной поверхности можно получить, выбирая одно из семейств сети совершенно произвольно; тогда второе семейство однозначно [1]) *определится, если потребовать, чтобы сеть получилась сопряженной.* В самом деле, пусть одно семейство задано произвольно,

$$\omega(u, v) = C. \tag{516}$$

Тогда в каждой точке поверхности дифференциалы криволинейных координат при смещении по кривой семейства (их мы обозначим через δu, δv) будут связаны соотношением

$$\omega_u \delta u + \omega_v \delta v = 0, \tag{517}$$

которое мы получим, дифференцируя (516). Мы исключаем из рассмотрения особые точки кривых (516), так что из ω_u, ω_v по крайней мере одно не равно нулю. Пусть для определенности $\omega_v \neq 0$, следовательно, $\delta u \neq 0$.

Мы должны построить теперь второе семейство, сопряженное с первым. Пусть du, dv будут дифференциалы координат u, v при смещении из какой-нибудь точки поверхности по кривой второго

[1]) С нижеуказанным исключением.

семейства. Потребуем теперь сопряженность сети, что равносильно соблюдению условия (515) *в каждой точке поверхности*. Перепишем это условие:

$$L\,du\,\delta u + M\,du\,\delta v + M\,dv\,\delta u + N\,dv\,\delta v = 0.$$

Деля на δu и заменяя $\frac{\delta v}{\delta u}$ через $-\frac{\omega_u}{\omega_v}$ в силу (517), получаем

$$\left(L - M\frac{\omega_u}{\omega_v}\right)du + \left(M - N\frac{\omega_u}{\omega_v}\right)dv = 0. \tag{518}$$

В круглых скобках стоят известные нам функции от u, v, так что мы получаем дифференциальное уравнение, которое можно переписать в виде

$$\frac{dv}{du} = f(u, v),$$

если коэфициент при dv отличен от нуля. По теореме существования мы получаем семейство интегральных кривых, проходящих по одной через каждую точку поверхности. Это семейство от одного параметра и составит сопряженную сеть совместно с произвольно выбранным семейством (516).

Если коэфициент при dv равен нулю, но при du отличен от нуля, то получаем $du = 0$, т. е. искомое семейство совпадает с семейством координатных линий v. В обоих случаях второе семейство определится однозначно.

Наконец, если оба коэфициента равны нулю, то уравнение (518) удовлетворяется при любых du, dv, т. е. любое семейство на поверхности образует с выбранным семейством (516) сопряженную сеть. Чтобы выяснить, когда такой случай возможен, запишем условия

$$L - M\frac{\omega_u}{\omega_v} = 0, \quad M - N\frac{\omega_u}{\omega_v} = 0. \tag{519}$$

Отсюда немедленно следует

$$LN - M^2 = 0,$$

а следовательно, гауссова кривизна K тоже равна нулю и наша поверхность оказывается развертывающейся. Вставим теперь в (519) вместо $-\frac{\omega_u}{\omega_v}$ снова $\frac{\delta v}{\delta u}$. Получим

$$L\,\delta u + M\,\delta v = M\,\delta u + N\,\delta v = 0,$$

откуда, умножая первое выражение на δu, второе на δv и складывая, получим

$$L\,\delta u^2 + 2M\,\delta u\,\delta v + N\,\delta v^2 = 0.$$

Это показывает, что дифференциалы координат δu, δv вдоль кривых семейства (516) удовлетворяют уравнению асимптотических линий, т. е. семейство (516) есть семейство асимптотических линий. Но на

развертывающейся поверхности асимптотические линии совпадают с прямолинейными образующими.

Следовательно, *по произвольно выбранному семейству* (516) *на данной поверхности однозначно определяется второе семейство, образующее с первым сопряженную сеть, за исключением случая, когда* (516) *есть семейство образующих на развертывающейся поверхности.* В последнем случае второе семейство становится неопределенным.

К этому следует добавить, что может случиться, что второе семейство хотя и определится однозначно, но совпадет с первым, так что сопряженная сеть выродится фактически в одно семейство. Посмотрим, когда это возможно. В таком случае можно принять du, dv вдоль кривой второго семейства совпадающими с δu, δv вдоль кривой семейства (516), и условие сопряженности (515) примет вид

$$L\,\delta u^2 + 2M\,\delta u\,\delta v + N\,\delta v^2 = 0. \tag{520}$$

Таким образом δu, δv вдоль кривых семейства (516) удовлетворяют диференциальному уравнению асимптотических линий. Итак, *совпадение второго семейства с исходным семейством* (516) *означает, что в качестве исходного семейства* (516) *выбрано одно из двух семейств асимптотических* (подразумевается, — на поверхности, где $K < 0$). Это и естественно было ожидать, так как асимптотическое направление само себе сопряжено, и условие (520), характеризующее асимптотическое направление, можно рассматривать как частный случай условия (515), когда записывается сопряженность данного направления самому себе.

ГЛАВА VII.

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТИ.

Пусть в пространстве даны две поверхности S и S^*, между точками которых установлено взаимно однозначное соответствие так, что длина *любой кривой* на поверхности S равна длине соответствующей кривой на поверхности S^*. Такого рода взаимно однозначное отображение поверхности S в поверхность S^* мы будем коротко называть *изгибанием* [1]) поверхности S в поверхность S^*; мы будем также говорить, что S^* получена путем изгибания S и т. д. Само соответствие между S и S^* мы будем называть *изометрическим.*

Термин „изгибание“ связан с наглядным представлением о поверхности как о гибкой, но нерастяжимой и несжимаемой пленке; такую пленку можно изгибать в пространстве, меняя ее форму, но сохраняя

---

[1]) Строго говоря, такое отображение называется *изгибанием* только в том случае, если оно может быть осуществлено *непрерывной* деформацией поверхности S в поверхность S^* с сохранением всех длин на S. Мы позволим себе употреблять этот термин в более широком смысле.

длины всех кривых на ней. Примером может служить свертывание плоского листа бумаги в цилиндр или конус. Приведенное определение изгибания формулирует математическую сущность этого наглядного представления.

Всякую поверхность можно изгибать (по крайней мере, если ограничиваться достаточно малыми ее кусками). Но, изгибая данную поверхность, можно получить далеко не все остальные поверхности, а только определенный их класс. Дело в том, что далеко не всякие две поверхности допускают изометрическое соответствие между собой.

Совокупность тех связанных с поверхностью геометрических фактов, которые сохраняются при изгибании без изменения, мы будем называть внутренней геометрией поверхности.

Следовательно, все поверхности, получающиеся друг из друга изгибанием, обладают одной и той же внутренней геометрией. Задачей этой главы является изучение поверхностей с точки зрения их внутренней геометрии.

§ 55. Роль первой квадратичной формы.

Выясним прежде всего, какими аналитическими средствами характеризуется внутренняя геометрия поверхности. Мы утверждаем, что *для того чтобы внутренняя геометрия поверхности вполне определилась, необходимо и достаточно знать на поверхности первую квадратичную форму*

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{521}$$

т. е. знать E, F, G как функции u, v хотя бы в одной системе криволинейных координат.

В самом деле, пусть нам известна внутренняя геометрия поверхности, отнесенной к какой-нибудь системе координат u, v. Это значит, прежде всего, что нам известны длины всех кривых на поверхности, так как эти длины остаются инвариантными при изгибании и принадлежат, следовательно, к внутренней геометрии поверхности. Тем самым нам известен и дифференциал дуги ds в любой точке по любому направлению. Но так как ds^2 выражается формулой (521), то нам известно, следовательно, значение первой квадратичной формы при любых u, v, du, dv, т. е. известны E, F, G как функции u, v. Первая квадратичная форма, таким образом, определилась, хотя мы и не можем сказать ничего определенного о форме поверхности в пространстве.

Обратно, пусть на поверхности S, отнесенной к каким-то криволинейным координатам u, v, нам известна первая квадратичная форма, т. е. E, F, G заданы. Ничего другого о поверхности S мы не знаем, тем не менее ее внутренняя геометрия полностью определится. Прежде всего, исходя из первой квадратичной формы, мы можем определить длину любой кривой $u(t)$, $v(t)$ на поверхности S:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E(u, v)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F(u, v)\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G(u, v)\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt. \tag{522}$$

Рассмотрим теперь *всевозможные* поверхности S^*, обладающие *той же* первой квадратичной формой, т. е. поверхности, на которых в подходяще выбранных координатах u, v коэфициенты E, F, G являются такими же функциями от u, v, как и на поверхности S. Установим затем между поверхностями S^* и поверхностью S взаимно однозначное соответствие, сопоставляя точки с одинаковыми значениями u, v. Тогда, как видно из формулы (522), длины соответствующих кривых окажутся одинаковыми и поверхности S^* получаются, следовательно, из S путем ее изгибания. По определению внутренняя геометрия на S^* будет та же, что и на S. Следовательно, можно рассмотреть внутреннюю геометрию на произвольно выбранной поверхности из числа поверхностей S^*; она будет тождественна с искомой внутренней геометрией на S.

Приведенное рассуждение показывает теоретически, что первая квадратичная форма характеризует *всю* внутреннюю геометрию поверхности S; при этом *отдельные факты внутренней геометрии мы будем выводить из первой квадратичной формы не путем построения вспомогательной поверхности S^*, а путем непосредственных вычислений над коэфициентами E, F, G.*

Действительно, при изгибании поверхности длины всех кривых остаются по определению неизменными; то же относится к дифференциалу длины ds, выражаемому первой квадратичной формой (521). Подразумевая, что после изгибания каждая точка сохранила те же значения координат u, v, что и до изгибания, и что, следовательно, du, dv, отвечающие каждому бесконечно малому смещению из данной точки, также сохранили прежние значения, мы заключаем, что E, F, G должны иметь в каждой точке прежние значения, т. е. выражаться прежними функциями от u, v. Поэтому, если какая-нибудь величина, связанная с геометрией поверхности, выражается через E, F, G и их производные, то эта величина остается *инвариантной* при изгибании и принадлежит, следовательно, внутренней геометрии поверхности. Из известного нам ранее сюда относится, кроме измерения длин, измерение *углов* и *площадей* на поверхности, определяемое формулами

$$\cos(\widehat{d\mathbf{r}, \delta\mathbf{r}}) = \frac{E\,du\,\delta u + F\,du\,\delta v + F\,dv\,\delta u + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}},$$

$$S = \iint \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Действительно, сохраняя у каждой точки ее прежние координаты u, v, мы имеем прежние du, dv, δu, δv в первой формуле и прежнюю область интегрирования по u, v во второй формуле. Кроме того, E, F, G в этом же предположении сохраняют свои значения. Следовательно, угол между двумя данными кривыми и площадь данной области на поверхности после изгибания последней сохраняют также прежние значения.

§ 56. Деривационные формулы Гаусса и Вейнгартена.

Начиная с этого параграфа, мы переходим к новым обозначениям. Криволинейные координаты на поверхности и коэфициенты первой и второй квадратичных форм мы будем обозначать буквами, снабженными целесообразно подобранными значками (индексами). Прежде всего криволинейные координаты u, v мы будем обозначать u^1, u^2. Значки 1, 2 поставлены нами вверху, а не внизу по весьма существенным причинам, которые полностью раскрываются в тензорном анализе; здесь мы не можем вдаваться в изложение их. Коэфициент первой формы E мы обозначаем через g_{11}, F — через g_{12} или g_{21} безразлично (так что $g_{12}=g_{21}$), G — через g_{22}. Коэфициенты второй формы обозначаем аналогично b_{11}, $b_{12}=b_{21}$, b_{22}. Диференцирование радиуса-вектора $\mathbf{r}$ поверхности по u^1 мы отмечаем значком 1, поставленным при $\mathbf{r}$ снизу, а диференцирование по u^2 — значком 2 снизу.

Нижеследующая таблица дает переход от новых обозначений к старым:

u	v	E	F	F	G	L	M	M	N	$\mathbf{r}_u$	$\mathbf{r}_v$	$\mathbf{r}_{uu}$	$\mathbf{r}_{uv}=\mathbf{r}_{vu}$	$\mathbf{r}_{vv}$
u^1	u^2	g_{11}	g_{12}	g_{21}	g_{22}	b_{11}	b_{12}	b_{21}	b_{22}	$\mathbf{r}_1$	$\mathbf{r}_2$	$\mathbf{r}_{11}$	$\mathbf{r}_{12}=\mathbf{r}_{21}$	$\mathbf{r}_{22}$

(523)

Новые обозначения кажутся значительно сложнее и неудобнее старых; тем не менее в тех вопросах, которыми мы сейчас займемся, обнаружатся их большие преимущества. Преимущества эти заключаются в сжатой и наглядной записи различных формул и соотношений.

Прежде всего запишем в новых обозначениях первую квадратичную форму:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}\,du^1\,du^2 + g_{22}(du^2)^2.$$

Мы видим, что значки у g_{11}, g_{12}, g_{22} подобраны так, чтобы они совпадали с номерами координат, от которых взяты диференциалы в соответствующем члене. Очевидно, формулу можно переписать в виде

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} g_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta.$$

Совершенно аналогично, вторая квадратичная форма примет вид

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2} b_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta.$$

Сделаем еще один шаг в упрощении записи. Мы будем подразумевать, что по α и β производится суммирование (в котором α и β пробегают значения 1, 2), не выписывая явно знаков суммирования. Таким образом запись первой и второй квадратичных форм примет вид

$$g_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta \quad \text{и} \quad b_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta. \tag{524}$$

Более того, мы условимся раз навсегда, что если в написанном одночленном выражении дважды встречается один и тот же буквенный значок, например α, один раз наверху и один раз внизу, то подразумевается, что выражение просуммировано по этому значку α, т. е. α приданы последовательно значения $\alpha = 1, 2$, и результаты сложены. Знак $\sum$ при этом лишь подразумевается, но не выписывается. Очевидно, (524) есть частный случай такой сокращенной записи.

На первый взгляд кажется, что эта запись будет давать повод к многочисленным недоразумениям; однако, как мы увидим, она оказывается весьма практичной.

Перепишем еще известные нам выражения для коэфициентов первой и второй квадратичных форм в новых обозначениях. Мы имеем

$$E = \mathbf{r}_u\mathbf{r}_u, \quad F = \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v, \quad G = \mathbf{r}_v\mathbf{r}_v, \quad L = \mathbf{r}_{uu}\mathbf{m}, \quad M = \mathbf{r}_{uv}\mathbf{m}, \quad N = \mathbf{r}_{vv}\mathbf{m}.$$

Теперь получим

$$g_{11} = \mathbf{r}_1\mathbf{r}_1, \quad g_{12} = \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2, \quad g_{22} = \mathbf{r}_2\mathbf{r}_2,$$

$$b_{11} = \mathbf{r}_{11}\mathbf{m}, \quad b_{12} = \mathbf{r}_{12}\mathbf{m}, \quad b_{22} = \mathbf{r}_{22}\mathbf{m}.$$

Очевидно, эти формулы можно переписать кратко, употребляя буквенные обозначения для индексов:

$$g_{ij} = \mathbf{r}_i\mathbf{r}_j, \quad b_{ij} = \mathbf{r}_{ij}\mathbf{m}. \tag{525}$$

Действительно, если здесь давать i, j значения 1, 2 во всевозможных комбинациях, то формулы (525) порождают выписанные выше шесть формул. Мы условимся раз навсегда, что если в данном равенстве какой-нибудь буквенный значок (например i) встречается по одному разу в каждом члене, то равенство подразумевается верным при любом значении $i = 1, 2$; то же относится и к случаю, когда таких (встречающихся по одному разу) значков несколько.

Переходим к выводу *деривационных формул Гаусса*. Рассмотрим вторые производные радиуса-вектора $\mathbf{r}$ по криволинейным координатам в данной точке, $\mathbf{r}_{ij}$ ($i, j = 1, 2$). Каждый из этих векторов разложим по векторам $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$, т. е. по двум неколлинеарным касательным векторам $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ в данной точке и по единичному нормальному вектору $\mathbf{m}$. Запишем

$$\mathbf{r}_{ij} = G_{ij}^1\mathbf{r}_1 + G_{ij}^2\mathbf{r}_2 + \alpha_{ij}\mathbf{m}. \tag{526}$$

Через G_{ij}^1, G_{ij}^2 обозначены коэфициенты разложения при $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$; значки i, j поставлены внизу, чтобы отметить, что разлагается вектор $\mathbf{r}_{ij}$. Через α_{ij} обозначен коэфициент при $\mathbf{m}$ в разложении $\mathbf{r}_{ij}$. Фактически в записи (526) заключаются три формулы, получающиеся из (526) при i, j, равных соответственно 1, 1; 1, 2; 2, 2. Случай $i = 2$, $j = 1$ ничего нового не дает, так как очевидно $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_{21}$, и коэфициенты разложения должны тоже быть одинаковыми:

$$G_{12}^1 = G_{21}^1, \quad G_{12}^2 = G_{21}^2.$$

Эти равенства, выражающие, как говорят, симметрию величин G_{ij}^k относительно нижних индексов, можно записать одной формулой с буквенными индексами

$$G_{ij}^k = G_{ji}^k \qquad (i, j, k = 1, 2). \tag{527}$$

Действительно, пробуя всевозможные комбинации индексов i, j, k, мы получим формально восемь равенств, из которых четыре будут тождествами, а остальные четыре совпадут с предшествующими равенствами, каждое из которых появится по два раза.

Займемся теперь подсчетом коэфициентов в разложении (526). Умножая скалярно на $\mathbf{m}$ обе части равенства (526) и учитывая, что $\mathbf{m}$ перпендикулярен касательным векторам $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, так что $\mathbf{mr}_1 = \mathbf{mr}_2 = 0$, получим

$$\mathbf{r}_{ij}\mathbf{m} = \alpha_{ij}.$$

Другими словами, коэфициенты α_{ij} совпадают с коэфициентами второй квадратичной формы, как это видно из (525). Итак,

$$\alpha_{ij} = b_{ij},$$

и разложение (526) перепишется в виде

$$\mathbf{r}_{ij} = G_{ij}^1\mathbf{r}_1 + G_{ij}^2\mathbf{r}_2 + b_{ij}\mathbf{m}. \tag{528}$$

Остается найти шесть коэфициентов G_{ij}^k $(i, j, k = 1, 2)$.

Введем сокращенные обозначения

$$\mathbf{r}_k\mathbf{r}_{ij} = G_{k,ij} \qquad (i, j, k = 1, 2). \tag{529}$$

Как мы видим, если давать i, j, k всевозможные комбинации значений 1, 2, получается шесть существенно различных величин $G_{k,ij}$, так как относительно последних двух индексов они будут, очевидно, симметричны:

$$G_{k,ij} = G_{k,ji}.$$

Эти величины часто называются *символами Христофеля первого рода*.

Умножим теперь скалярно обе части равенства (528), во-первых, на $\mathbf{r}_1$ и, во-вторых, на $\mathbf{r}_2$. Получим

$$\left.\begin{aligned} G_{1,ij} &= G_{ij}^1 g_{11} + G_{ij}^2 g_{21} \\ G_{2,ij} &= G_{ij}^1 g_{12} + G_{ij}^2 g_{22} \end{aligned}\right\} \quad (i, j = 1, 2). \tag{530}$$

Коэфициенты первой квадратичной формы появились здесь в силу формул (525), а последние члены обратились в нуль вследствие ортогональности $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ к $\mathbf{m}$. Считая i, j в формулах (530) на время фиксированными, можно рассматривать (530) как систему двух уравнений с двумя неизвестными G_{ij}^1 и G_{ij}^2. Легко, конечно, разрешить эту систему;

в результате получим

$$\left.\begin{aligned} G^1_{ij} &= \frac{1}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}(g_{22}G_{1,ij}-g_{12}G_{2,ij}),\\ G^2_{ij} &= \frac{1}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}(-g_{12}G_{1,ij}+g_{11}G_{2,ij}). \end{aligned}\right\} \qquad (530')$$

Введем сокращенные обозначения

$$g^{11}=\frac{g_{22}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2},\quad g^{12}=g^{21}=-\frac{g_{12}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2},\quad g^{22}=\frac{g_{11}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}. \qquad (531)$$

Другими словами, матрицы

$$\left\|\begin{matrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{matrix}\right\| \quad \text{и} \quad \left\|\begin{matrix} g^{11} & g^{12}\\ g^{21} & g^{22}\end{matrix}\right\|$$

связаны друг с другом как матрицы взаимных миноров. Теперь предыдущие формулы могут быть переписаны в виде

$$G^1_{ij}=g^{11}G_{1,ij}+g^{12}G_{2,ij},\quad G^2_{ij}=g^{21}G_{1,ij}+g^{22}G_{2,ij}. \qquad (532)$$

Мы видим, что в этой записи (532) G^k_{ij} имеют вполне закономерное строение: в выражении для G^1_{ij} первый значок наверху у членов в правой части будет 1, т. е. такой же, как у G^1_{ij} наверху. Второй же значок наверху сначала имеет значение 1, потом 2, т. е. всегда такое же, как численный значок внизу в тех же членах правой части. То же имеет место и для второй из формул (532). Исходя из этого, мы можем переписать эти формулы сокращенно в виде одной:

$$G^k_{ij}=g^{k\alpha}G_{\alpha,ij} \qquad (i,\ j,\ k=1,\ 2). \qquad (533)$$

Действительно, давая k значения сначала 1, потом 2 и производя каждый раз в правой части подразумеваемое там суммирование по индексу α, $\sum\limits_{\alpha=1}^{2}$, мы вернемся к подробной записи (532) тех же формул. Совершенно аналогично, формулы (530) можно переписать в сжатом виде так:

$$G_{k,ij}=G^{\gamma}_{ij}g_{\alpha k} \qquad (i,\ j,\ k=1,\ 2). \qquad (534)$$

Итак, формулы (533) выражают коэфициенты G^k_{ij} через $g^{k\alpha}$ и $G_{\alpha,ij}$, а значения этих величин определены формулами (531) и (529).

Как мы сейчас покажем, — и это очень важное обстоятельство — величины $G_{k,ij}$ могут быть выражены через частные производные коэфициентов первой квадратичной формы g_{ij} по u^1, u^2. В самом деле, запишем, пользуясь формулами (525):

$$\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j=g_{ij},\quad \mathbf{r}_j\mathbf{r}_k=g_{jk},\quad \mathbf{r}_k\mathbf{r}_i=g_{ki}.$$

Здесь каждый из значков i, j, k имеет значение либо 1, либо 2, но во всяком случае одно и то же во всех трех формулах. Продифференцируем первое равенство по u^k, второе по u^i, третье по u^j. Получим

$$\mathbf{r}_{ik}\mathbf{r}_j + \mathbf{r}_i\mathbf{r}_{jk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k},$$

$$\mathbf{r}_{ji}\mathbf{r}_k + \mathbf{r}_j\mathbf{r}_{ki} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i},$$

$$\mathbf{r}_{kj}\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_k\mathbf{r}_{ij} = \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}.$$

Почленно сложим последние два равенства и вычтем из них первое. Тогда, учитывая, что порядок значков у $\mathbf{r}_{ij}$ и g_{ij} не играет роли (так как $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_{21}$ и $g_{12} = g_{21}$), мы получим

$$2\mathbf{r}_k\mathbf{r}_{ij} = \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}.$$

Остальные члены левой части, как легко проверить, взаимно уничтожаются. Отсюда, пользуясь сокращенным обозначением (529), получим

$$G_{k,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right). \tag{535}$$

Это — одна из основных формул теории поверхностей; она выражает, как мы видим, символы Христофеля первого рода $G_{k,ij}$ через коэфициенты первой квадратичной формы (точнее, через производные от них).

Выпишем три из формул (535):

$$G_{1,11} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}, \quad G_{1,12} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}, \quad G_{1,22} = \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}.$$

Остальные три получаются из этих заменой значка 1 через 2 и наоборот.

Так как величины g^{ij} выражаются через коэфициенты первой квадратичной формы согласно (531), то величины G_{ij}^k, как показывают формулы (533), в окончательном итоге выражаются через g_{ij} и $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$ ($i, j, k = 1, 2$). Таким образом *задание первой квадратичной формы в данной системе координат вполне определяет коэфициенты G_{ij}^k в формулах* (528). *Эти величины G_{ij}^k называются часто символами Христофеля второго рода, а формулы* (528), *коэфициенты в которых мы теперь окончательно подсчитали, — деривационными формулами Гаусса.*

Переходим к выводу *деривационных формул Вейнгартена*. Запишем перпендикулярность вектора $\mathbf{m}$ к любому из касательных векторов $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$:

$$\mathbf{m}\mathbf{r}_i = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Продифференцируем теперь это тождество по любой из координат u^1, u^2

$$\frac{\partial}{\partial u^j}(\mathbf{m}\mathbf{r}_i) = 0 \quad (i, j = 1, 2)$$

или

$$\mathbf{m}_j\mathbf{r}_i + \mathbf{m}\mathbf{r}_{ij} = 0.$$

В силу (525), второе слагаемое совпадает с b_{ij}, и мы получаем при любых i, j

$$\mathbf{m}_j\mathbf{r}_i = -b_{ij} \quad (i, j = 1, 2). \tag{536}$$

Эти выражения для коэфициентов второй квадратичной формы уже были в свое время получены нами в старых обозначениях.

Назначение формул Вейнгартена состоит в том, чтобы дать частные производные единичного нормального вектора $\mathbf{m}$ по u^1 и u^2 в разложении по основным векторам $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$ в каждой точке поверхности. Эти частные производные — мы их будем обозначать $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$ — взяты от единичного нормального вектора $\mathbf{m}$, следовательно, ему ортогональны и расположены в касательной плоскости к поверхности. Поэтому при их разложении можно ограничиться векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{m}_1 &= -b_1^1\mathbf{r}_1 - b_1^2\mathbf{r}_2, \\ \mathbf{m}_2 &= -b_2^1\mathbf{r}_1 - b_2^2\mathbf{r}_2, \end{aligned}\right\} \tag{537}$$

где через $-b_j^i$ обозначены неизвестные пока коэфициенты разложения. Значки при b расставлены так, что обе формулы (537) можно записать в нашей сокращенной записи:

$$\mathbf{m}_i = -b_i^1\mathbf{r}_1 - b_i^2\mathbf{r}_2 = -b_i^\alpha\mathbf{r}_\alpha \quad (i = 1, 2). \tag{537'}$$

Чтобы подсчитать коэфициенты b_i^j, умножим скалярно обе части равенства (537') сначала на $\mathbf{r}_1$, потом на $\mathbf{r}_2$. Получим

$$\mathbf{m}_i\mathbf{r}_1 = -b_i^1\mathbf{r}_1\mathbf{r}_1 - b_i^2\mathbf{r}_2\mathbf{r}_1,$$

$$\mathbf{m}_i\mathbf{r}_2 = -b_i^1\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 - b_i^2\mathbf{r}_2\mathbf{r}_2.$$

В силу (536) и (525) мы узнаем слева коэфициенты второй, а справа первой квадратичной формы; равенства переписываются так:

$$\left.\begin{aligned} b_{i1} &= b_i^1 g_{11} + b_i^2 g_{21}, \\ b_{i2} &= b_i^1 g_{12} + b_i^2 g_{22}. \end{aligned}\right\} \tag{538}$$

Решая эти уравнения относительно b_i^1 и b_i^2, получаем

$$b_i^1 = \frac{b_{i1}g_{22} - b_{i2}g_{21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = b_{i1}g^{11} + b_{i2}g^{21} = b_{i\alpha}g^{\alpha 1},$$

$$b_i^2 = \frac{-b_{i1}g_{12} + b_{i2}g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = b_{i1}g^{12} + b_{i2}g^{22} = b_{i\alpha}g^{\alpha 2}.$$

Эти обе формулы можно объединить в одной:

$$b_i^j = b_{i\alpha} g^{\alpha j}. \tag{538'}$$

Здесь i, j придаются все четыре возможные комбинации значений 1, 2, а по α производится суммирование, $\sum_{\alpha=1}^{2}$. Формулы (537), где коэфициенты b_i^j определяются согласно (538'), и называются *деривационными формулами Вейнгартена*. Объединим теперь формулы Гаусса (528) и Вейнгартена (537'), переписав их в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u^i} &= G_{1i}^1 \mathbf{r}_1 + G_{1i}^2 \mathbf{r}_2 + b_{1i}\mathbf{m}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u^i} &= G_{2i}^1 \mathbf{r}_1 + G_{2i}^2 \mathbf{r}_2 + b_{2i}\mathbf{m}, \quad (i = 1, 2). \\ \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u^i} &= -b_i^1 \mathbf{r}_1 - b_i^2 \mathbf{r}_2. \end{aligned}\right\} \tag{539}$$

Смысл этих формул, очевидно, в следующем. Они выражают первые частные производные [1]) *по* u^1 *и* u^2 *от основных векторов в данной точке поверхности — двух касательных* $\mathbf{r}_1$ *и* $\mathbf{r}_2$ *и одного нормального* $\mathbf{m}$. *Эти частные производные от* $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$ *получаются в виде разложения по самим векторам* $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$.

Диференцируя эти формулы еще раз и пользуясь уже имеющимися разложениями первых производных, получаем и вторые производные от $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$, разложенные по $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$; то же относится и к производным третьего и т. д. порядков. Это позволяет отнести всю картину поведения поверхности (в бесконечной близости данной точки определяемую именно значениями последовательных частных производных от $\mathbf{r}$ в этой точке) к основным векторам $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$. Особенно существенно при всем этом, что коэфициенты разложения (539) определяются, как мы видели, целиком через коэфициенты g_{ij}, b_{ij} первой и второй квадратичных форм (и их производные); то же будет относиться, очевидно, и к разложению производных от векторов $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$ по u^1, u^2 второго и выше порядков.

§ 57. Роль второй квадратичной формы.

Выведенные в § 56 деривационные формулы (539) играют фундаментальную роль в теории поверхностей вообще, в том числе и при изучении внутренней геометрии поверхности. Но прежде чем окончательно перейти в область внутренней геометрии, мы используем эти формулы, чтобы ответить на некоторые естественно возникающие вопросы из „внешней“ геометрии поверхности. Мы знаем, что задание

[1]) Отсюда и термин — деривационные формулы (dérivée — производная).

первой квадратичной формы на поверхности определяет внутреннюю геометрию на поверхности, т. е. характеризует поверхность с точностью до ее изгибания. Какие аналитические данные следует присоединить к первой квадратичной форме, чтобы изгибание сделалось невозможным и поверхность приобрела твердую форму в пространстве? На это отвечает следующая теорема:

Если на некоторой поверхности S заданы и первая и вторая квадратичные формы, т. е. если в некоторой системе криволинейных координат u^1, u^2 коэфициенты g_{ij}, b_{ij} заданы как функции от u^1, u^2, то геометрическая форма поверхности S в пространстве вполне определится [1]). Более точно: *любая поверхность S^*, обладающая теми же первой и второй квадратичными формами, может отличаться от S лишь положением в пространстве, т. е. получается из S движением S как твердого тела в пространстве.* Отметим между прочим, что обратная теорема очевидна: передвигая S как твердое тело в пространстве, мы не меняем на S ни первой ни второй квадратичных форм, что легко вытекает из их геометрического смысла.

Итак, *пусть даны две поверхности S и S^*, обладающие одинаковыми первой и второй квадратичными формами.* Более точно: на S и S^* можно так согласовать выбор криволинейных координат u^1, u^2, что g_{ij} и b_{ij} будут выражаться одинаковыми функциями от u^1, u^2, причем и область изменения переменных u^1, u^2 будет на S и S^* одинакова. Мы будем называть точку M на S и точку M^* на S^* соответствующими точками, если им отвечают одинаковые значения u^1, u^2. Очевидно, что в соответствующих точках обеих поверхностей значения g_{ij} и b_{ij} тоже будут одинаковы. *Докажем, что движением S^* в пространстве можно добиться совмещения S^* с S таким образом, что каждая точка M^* совпадет с соответствующей точкой M.*

Фиксируем прежде всего на поверхности S некоторую точку M_0 в качестве начальной; соответствующую ей точку M_0^* на S^* примем за начальную на S^*. Рассмотрим векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ как в точке M_0 поверхности S, так и в точке M_0^* поверхности S^*. Мы замечаем, что скалярные квадраты $\mathbf{r}_1^2$, $\mathbf{r}_2^2$ и скалярное произведение $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2$ будут равны соответственно g_{11}, g_{22} и g_{12} и, следовательно, имеют одинаковые значения в той и другой точке. Отсюда следует, что векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ в точках M_0 и M_0^* имеют соответственно одинаковые длины и образуют между собой одинаковые углы. Поэтому фигуры, образуемые векторами $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ в точках M_0 и M_0^*, конгруэнтны, и движением поверхности S^* как твердого тела можно добиться совпадения точки M_0^* и векторов $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ в ней с точкой M_0 и векторами $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ в ней. Тогда векторы $\mathbf{m}$ в точках M_0^* и M_0 тоже совпадут, так как они будут одинаково направлены в сторону вектора $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$.

---

[1]) В этом параграфе мы предполагаем, что на рассматриваемых поверхностях направление единичной нормали $\mathbf{m}$ выбрано всегда в сторону векторного произведения $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$, чем устраняется неопределенность в знаке второй квадратичной формы [см. (360)].

Итак, движением поверхности S^* как твердого тела мы добились совмещения точки M_0^* и основных векторов $\mathbf{r}_1^*$, $\mathbf{r}_2^*$, $\mathbf{m}^*$ в ней с соответствующей точкой M_0 на поверхности S и с основными векторами $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$ в ней. *Остается доказать, что теперь поверхность S^* целиком совместилась с S.*

Возьмем на поверхности S какую-нибудь кривую

$$u^1 = u^1(t), \quad u^2 = u^2(t), \tag{540}$$

которая при $t = 0$ проходит через точку M_0. Пользуясь этими же уравнениями (540) на поверхности S^*, мы получаем там соответствующую кривую, т. е. одинаковым значениям t будут отвечать соответствующие точки на обеих поверхностях. В частности, при $t = 0$ кривая на поверхности S^* проходит через точку M_0^*.

Изучим изменение векторов $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$ вдоль кривой (540) на поверхности S. Эти векторы являются функциями координат u^1, u^2 на поверхности; но так как вдоль кривой (540) u^1, u^2 в свою очередь зависят от t, то $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$ в конечном итоге являются функциями от t. Запишем их производные по t:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u^1}\frac{du^1}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u^2}\frac{du^2}{dt} = \left(G_{11}^1\frac{du^1}{dt} + G_{12}^1\frac{du^2}{dt}\right)\mathbf{r}_1 + \\
&+ \left(G_{11}^2\frac{du^1}{dt} + G_{12}^2\frac{du^2}{dt}\right)\mathbf{r}_2 + \left(b_{11}\frac{du^1}{dt} + b_{12}\frac{du^2}{dt}\right)\mathbf{m}, \\
\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u^1}\frac{du^1}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial u^2}\frac{du^2}{dt} = \left(G_{21}^1\frac{du^1}{dt} + G_{22}^1\frac{du^2}{dt}\right)\mathbf{r}_1 + \\
&+ \left(G_{21}^2\frac{du^1}{dt} + G_{22}^2\frac{du^2}{dt}\right)\mathbf{r}_2 + \left(b_{21}\frac{du^1}{dt} + b_{22}\frac{du^2}{dt}\right)\mathbf{m}, \\
\frac{d\mathbf{m}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u^1}\frac{du^1}{dt} + \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u^2}\frac{du^2}{dt} = -\left(b_1^1\frac{du^1}{dt} + b_2^1\frac{du^2}{dt}\right)\mathbf{r}_1 - \\
&- \left(b_1^2\frac{du^1}{dt} + b_2^2\frac{du^2}{dt}\right)\mathbf{r}_2.
\end{aligned}\right\} \tag{541}$$

Здесь для получения окончательных выражений в правой части использованы деривационные формулы (539).

Мы замечаем, что выписанные равенства дают нам систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений в нормальной форме, если рассматривать $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$ как неизвестные функции от t. Действительно, производные от $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$ по t выражены как линейные комбинации самих векторов $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$. Коэфициенты при $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$ в правых частях выражаются при этом через величины G_{ij}^k и b_{ij}, т. е. через коэфициенты второй и первой квадратичных форм и их производные, и через производные $\frac{du^1}{dt}$, $\frac{du^2}{dt}$ вдоль кривой (540).

Если мы рассмотрим теперь соответствующим образом кривую (540) на поверхности S^*, то вдоль нее мы также придем к уравнениям (541), причем не только общая запись уравнений, но и *вид функциональной зависимости от параметра t выражений в круглых скобках будет прежний*. Действительно, при одинаковых значениях t мы попадаем на

обеих поверхностях S и S^* в соответствующие точки, где значения u^1, u^2 одинаковые, следовательно, значения $\frac{du^1}{dt}$, $\frac{du^2}{dt}$ тоже одинаковые; кроме того, и это самое существенное, значения g_{ij}, b_{ij} и их производных в соответствующих точках тоже одинаковые, так как g_{ij}, b_{ij} на обеих поверхностях выражаются одинаковыми функциями от u^1, u^2. Следовательно, и значения G_{ij}^k тоже одинаковы. Итак, коэфициенты при $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$ в системе линейных диференциальных уравнений (541) будут *одинаковыми* функциями t как вдоль кривой (540) на поверхности S, так и вдоль соответствующей кривой на поверхности S^*. Но, кроме того, при $t=0$ мы попадаем на обеих кривых в точки M_0 и M_0^*, совпавшие между собой, причем в этих точках векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$ имеют одинаковые значения для обеих поверхностей.

Итак, при рассмотрении $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$ как функций t вдоль кривой (540) на поверхности S и вдоль соответствующей кривой на поверхности S^* эти функции $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$ удовлетворяют не только одной и той же нормальной системе линейных диференциальных уравнений (541), но и принимают при $t=0$ одни и те же начальные значения. Из анализа известно (см., например, Степанов, Диференциальные уравнения, гл. IV, § 1; гл. VII, § 2), что этими данными $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$ как функции от t определяются однозначно [1]) и должны, следовательно, быть одинаковыми вдоль кривой (540) на S и вдоль соответствующей кривой на S^*.

Возьмем какое-нибудь значение t; ему отвечает некоторая точка M на кривой (540) поверхности S и соответствующая точка M^* на кривой (540) поверхности S^*. Приращение радиуса-вектора при переходе из точки M_0 при $t=0$ в точку M может быть выражено, очевидно, интегралом вдоль кривой (540)

$$\int_0^t d\mathbf{r} = \int_0^t \left(\mathbf{r}_1 \frac{du^1}{dt} + \mathbf{r}_2 \frac{du^2}{dt}\right) dt.$$

Аналогично выражается приращение радиуса-вектора при переходе из точки M_0^* в точку M^*. Но так как $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ вдоль обеих кривых — одинаковые функции от t и так как u^1, u^2 — тоже одинаковые функции от t, то этот интеграл имеет одно и то же значение в обоих случаях. Вектор смещения $\overline{M_0M}$ совпадает с вектором $\overline{M_0^*M^*}$, а так как точки M_0 и M_0^* совпадают, то и точки M и M^* совпадут. Итак, любые две соответствующие точки M и M^* на кривых (540) поверхностей S и S^*

---

[1]) Соответствующая теорема доказывается в анализе, конечно, для *скалярных* функций. Но, разлагая наши вектор-функции $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$ по осям X, Y, Z, мы можем вместо трех векторных уравнений (541) записать девять скалярных с девятью неизвестными скалярными функциями — координатами векторов $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$. Этим мы обнаруживаем законность применения теоремы в нашем случае.

совпадают. Но кривую (540) мы проводили по поверхности S совершенно произвольно и могли притти в любую точку M на S; следовательно, поверхность S всеми своими точками совпадает с соответствующими точками поверхности S^*. Теорема доказана.

Легко было бы показать теперь, что совпадение первых квадратичных форм на поверхностях S и S^* и отличие вторых форм лишь знаком означает, что одна из этих поверхностей может быть получена из другой движением как твердое тело и *зеркальным отражением*.

§ 58. Формулы Гаусса и Кодацци.

Нами выяснено, что первая и вторая квадратичные формы определяют поверхность с точностью до ее положения в пространстве, и следовательно, все остальные геометрические данные и величины, связанные с поверхностью, целиком определяются заданием g_{ij} и b_{ij}. Но возникает вопрос, нет ли, кроме того, какой-либо связи между самими g_{ij} и b_{ij} как функциями u^1, u^2, связи, имеющей место на любой поверхности и в любых координатах u^1, u^2. Другими словами, нас интересует вопрос: *в какой мере наличие g_{ij}, т. е. внутренней геометрии поверхности, ограничивает выбор b_{ij} и тем самым окончательное оформление поверхности в пространстве?*

Наиболее естественный путь для ответа на этот вопрос состоял бы в составлении *условий интегрируемости* деривационных формул (539). А именно, нужно было бы сначала выписать формулы (539) при $i=1$ и продифференцировать их почленно по u^2; потом, наоборот, выписав (539) при $i=2$, продифференцировать их по u^1. Легко видеть, что в обоих случаях в левых частях формул (539) получится одно и то же; следовательно, можно приравнять и правые части соответствующих формул. Получим три векторных равенства; разлагая участвующие в них векторы по $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{m}$ и сравнивая коэфициенты при них, приходим к девяти уже скалярным уравнениям (из которых существенными, как оказывается, будут лишь три). Эти уравнения дают нам искомую зависимость между g_{ij} и b_{ij} (с участием и производных от этих величин).

Мы не пойдем непосредственно этим путем ввиду его технической сложности, а применим в сущности тот же прием, но в несколько замаскированном виде.

Выпишем формулу (535), учитывая, что $G_{k,ij}$ служит лишь обозначением скалярного произведения $\mathbf{r}_{ij}\mathbf{r}_k$:

$$\mathbf{r}_{ij}\mathbf{r}_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right).$$

Продифференцируем обе части по u^l, где i, j, k, l можно давать в любой комбинации значения 1, 2. Получим, обозначая через $\mathbf{r}_{ijl}$ третью производную $\mathbf{r}$ по u^i, u^j, u^l:

$$\mathbf{r}_{ijl}\mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{ij}\mathbf{r}_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^j \partial u^l} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial u^i \partial u^l} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^k \partial u^l}\right).$$

Так как эта формула верна при любых значениях индексов $i, j, k, l = 1, 2$, то она останется верной, если то значение, которое имел индекс l, мы припишем j, и наоборот. Формально это будет означать, что индексы l и j поменяются местами:

$$\mathbf{r}_{ij}\mathbf{r}_k + \mathbf{r}_{il}\mathbf{r}_{kj} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^l \partial u^j} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial g_{il}}{\partial u^k \partial u^j}\right).$$

Вычитая из верхней формулы нижнюю почленно и учитывая, что порядок индексов, указывающих последовательные частные диференцирования по u^1, u^2, не играет роли, получим

$$\mathbf{r}_{ij}\mathbf{r}_{kl} - \mathbf{r}_{il}\mathbf{r}_{kj} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^k \partial u^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial u^i \partial u^j} - \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial u^i \partial u^l} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial u^k \partial u^j}\right).$$

Кажется на первый взгляд, что здесь заключается большое количество формул в зависимости от значений, которые мы будем придавать индексам i, j, k, l. На самом деле существенной здесь является лишь одна формула, получаемая при $i = j = 1$, $k = l = 2$:

$$\mathbf{r}_{11}\mathbf{r}_{22} - \mathbf{r}_{12}\mathbf{r}_{12} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} + \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} - 2\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2}\right). \qquad (542)$$

Если попробовать другие комбинации значений i, j, k, l, то легко убедиться, что получаются либо тождества, либо то же самое уравнение (542).

В самом деле, если $i = k$, то справа и слева получается тождественно нуль. То же происходит, если $j = l$. Остается случай, когда i и k различны, т. е. имеют значения 1, 2, и j и l тоже различны, т. е. также имеют значения 1, 2. Положим ли мы $i = 1$, $k = 2$, или наоборот, не имеет значения, так как разница будет лишь в знаках обеих частей равенства. То же относится и к индексам j и l.

Выпишем теперь формулы (528) при различных значениях i, j:

$$\mathbf{r}_{11} = G_{11}^{\alpha}\mathbf{r}_{\alpha} + b_{11}\mathbf{m}, \quad \mathbf{r}_{12} = G_{12}^{\gamma}\mathbf{r}_{\gamma} + b_{12}\mathbf{m}, \quad \mathbf{r}_{22} = G_{22}^{\beta}\mathbf{r}_{\beta} + b_{22}\mathbf{m}. \qquad (543)$$

В правых частях использована сокращенная запись суммирования. Составим следующие скалярные произведения, помня, что скалярные произведения $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ на $\mathbf{m}$ равны нулю:

$$\mathbf{r}_{11}\mathbf{r}_{22} = G_{11}^{\alpha}G_{22}^{\beta}\mathbf{r}_{\alpha}\mathbf{r}_{\beta} + b_{11}b_{22}\mathbf{m}^2,$$
$$\mathbf{r}_{12}\mathbf{r}_{12} = G_{12}^{\gamma}G_{12}^{\delta}\mathbf{r}_{\gamma}\mathbf{r}_{\delta} + b_{12}^2\mathbf{m}^2.$$

Здесь γ, δ, как и α, β, — независимые индексы суммирования, пробегающие значения 1, 2; при этом γ входит в выражение (543) для $\mathbf{r}_{12}$, а δ — в совершенно аналогичное выражение для $\mathbf{r}_{12}$, взятое вторым множителем в скалярном произведении $\mathbf{r}_{12}\mathbf{r}_{12}$. Учитывая, что $\mathbf{r}_{\alpha}\mathbf{r}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$ и $\mathbf{m}^2 = 1$ и вставляя полученные выражения в (542), приходим к окончательной формуле

$$G_{11}^{\alpha}G_{22}^{\beta}g_{\alpha\beta} - G_{12}^{\gamma}G_{12}^{\delta}g_{\gamma\delta} + b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} + \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} - 2\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2}\right).$$

или

$$b_{11}b_{22}-b_{12}^2=\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1\partial u^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u^2\partial u^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1\partial u^1}-G_{12}^{\gamma}G_{12}^{\delta}g_{\gamma\delta}-G_{11}^{\gamma}G_{22}^{\delta}g_{\gamma\delta}. \quad (544)$$

Эта фундаментальная формула теории поверхностей называется *формулой Гаусса*. Ее значение состоит в следующем. Прежде всего правая часть (544) содержит только g_{11}, g_{12}, g_{22} и их первые и вторые производные по u^1, u^2. Действительно, три члена, содержащие вторые производные, у нас выписаны; что же касается величин G_{ij}^{k}, то они целиком выражаются через g_{11}, g_{12}, g_{22} и их первые производные по u^1, u^2 согласно формулам (530′) и (535). Можно было бы выписать суммирование по γ, δ и α, β в развернутом виде и фактически написать последние два члена формулы (544) выраженными через g_{11}, g_{12}, g_{22} и их первые производные по u^1, u^2. Никаких трудностей, кроме чисто технических, выкладка не представляет, но результат дает громоздкий и лишенный наглядности, поэтому останавливаться на ней мы не будем.

Итак, правая часть формулы (544) зависит только от первой квадратичной формы; левая же часть есть, очевидно, не что иное, как дискриминант второй квадратичной формы, в старых обозначениях $LN-M^2$.

Итак, *при задании первой квадратичной формы на поверхности вторую квадратичную форму нельзя выбирать произвольно уже потому, что ее дискриминант будет вполне определен формулой Гаусса.*

Этот результат допускает чрезвычайно важную геометрическую формулировку. Мы знаем, что гауссова кривизна поверхности определяется формулой

$$K=k_1k_2=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}. \quad (545)$$

Мы видим, что в силу (544) *гауссова кривизна K на поверхности вполне определяется коэфициентами первой квадратичной формы и их первыми и вторыми производными по u^1, u^2.*

Допустим теперь, что рассматриваемая поверхность подвергается изгибанию. Мы знаем, что если при этом сохранять у каждой точки те значения u^1, u^2, которые ей отвечали до изгибания, то и g_{11}, g_{12}, g_{22} остаются теми же функциями от u^1, u^2, как и до изгибания (см. конец § 55), и следовательно, они и их производные в каждой точке сохраняют прежние значения. Отсюда следует, что *при изгибании поверхности гауссова кривизна K в каждой ее точке остается без изменения.* Таким образом, хотя при изгибании поверхность вблизи каждой точки меняет свою форму, вследствие чего главные кривизны меняют свои значения, но их произведение — гауссова кривизна K — остается постоянным.

Переходим к выводу формул Кодацци — еще двух дифференциальных уравнений, связывающих коэфициенты первой и второй квадратичных

форм. Используя выражения (536) для коэфициентов второй квадратичной формы, можно написать:

$$b_{i1} = -\mathbf{m}_1\mathbf{r}_i,$$

$$b_{i2} = -\mathbf{m}_2\mathbf{r}_i.$$

Диференцируем первое равенство по u^2, а второе — по u^1:

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2} = -\mathbf{m}_{12}\mathbf{r}_i - \mathbf{m}_1\mathbf{r}_{i2},$$

$$\frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1} = -\mathbf{m}_{21}\mathbf{r}_i - \mathbf{m}_2\mathbf{r}_{i1}.$$

Вычитаем из первого равенства второе, учитывая, что $\mathbf{m}_{12} = \mathbf{m}_{21} = \frac{\partial^2\mathbf{m}}{\partial u^1 \partial u^2}$. Получим

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1} = \mathbf{m}_2\mathbf{r}_{i1} - \mathbf{m}_1\mathbf{r}_{i2}.$$

Вставим сюда выражения для $\mathbf{r}_{i1}$ и $\mathbf{r}_{i2}$, взятые из (528):

$$\mathbf{r}_{i1} = G^1_{i1}\mathbf{r}_1 + G^2_{i1}\mathbf{r}_2 + b_{i1}\mathbf{m},$$

$$\mathbf{r}_{i2} = G^1_{i2}\mathbf{r}_1 + G^2_{i2}\mathbf{r}_2 + b_{i2}\mathbf{m}.$$

Получим, учитывая, что скалярные произведения на $\mathbf{m}$ дают нуль, так как $\mathbf{m}$ — единичная вектор-функция и, следовательно, ортогональна своим производным:

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1} = G^1_{i1}\mathbf{r}_1\mathbf{m}_2 + G^2_{i1}\mathbf{r}_2\mathbf{m}_2 - G^1_{i2}\mathbf{r}_1\mathbf{m}_1 - G^2_{i2}\mathbf{r}_2\mathbf{m}_1.$$

Снова пользуясь выражениями (536), можно переписать уравнение в виде

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1} = -G^1_{i1}b_{12} - G^2_{i1}b_{22} + G^1_{i2}b_{11} + G^2_{i2}b_{21}$$

или окончательно

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2} - G^1_{i2}b_{11} - G^2_{i2}b_{21} = \frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1} - G^1_{i1}b_{12} - G^2_{i1}b_{22}. \qquad (546)$$

Давая индексу i последовательно значения 1 и 2, получаем два диференциальных уравнения, связывающих коэфициенты второй квадратичной формы b_{11}, b_{12}, b_{22} и их первые производные с коэфициентами первой квадратичной формы g_{11}, g_{12}, g_{22} и их первыми производными (входящими исключительно через величины G^k_{ij}). Эти два уравнения называются *формулами Кодацци*.

Для того чтобы полностью осветить роль формулы Гаусса (544) и формул Кодацци (546), формулируем, хотя и без доказательства, следующую основную теорему. Как уже упоминалось, отыскивая условия

интегрируемости деривационных формул (539), мы приходим к девяти уравнениям, связывающим коэфициенты g_{ij}, b_{ij} и их производные. Как показала бы соответствующая выкладка, среди этих девяти уравнений только три существенных, а именно формулы Гаусса и Кодацци. Исходя из того, что формулы Гаусса и Кодацци исчерпывают условия интегрируемости системы деривационных формул (539), и пользуясь соответствующими теоремами существования из теории диференциальных уравнений, можно доказать такую теорему:

Пусть в некоторой односвязной области изменения переменных u^1, u^2 заданы две диференциальные квадратичные формы с коэфициентами соответственно g_{11}, g_{12}, g_{22} и b_{11}, b_{12}, b_{22}. Точнее, коэфициенты этих форм заданы как функции от u^1, u^2.

Единственное ограничение, наложенное на коэфициенты первой квадратичной формы:

$$g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0, \quad g_{11} > 0,$$

что означает, что форма положительная [1]).

Единственное ограничение, наложенное на коэфициенты второй квадратичной формы, то, что они должны удовлетворять совместно с коэфициентами первой квадратичной формы уравнениям (544) и (546) (формулам Гаусса и Кодацци).

Тогда можно построить поверхность, для которой (при определенном выборе криволинейных координат u^1, u^2) первая и вторая квадратичные формы совпадут с наперед заданными нам диференциальными квадратичными формами (а область изменения криволинейных координат u^1, u^2 совпадет с наперед заданной областью изменения переменных u^1, u^2).

К этому следует добавить, что на основании доказанного в предыдущем параграфе такая поверхность определится с точностью до движения ее как твердого тела в пространстве.

Итак, чисто формально *аналитически* заданные две диференциальные квадратичные формы, из которых одна положительна, а другая связана с нею формулами Гаусса-Кодацци, всегда могут быть осуществлены на некоторой поверхности как ее первая и вторая квадратичные формы. Мы можем это выразить и так, сказав, что *формулы Гаусса-Кодацци представляют собой необходимое и достаточное условие того, чтобы две аналитически заданные квадратичные диференциальные формы, из которых одна положительная, служили первой и второй квадратичными формами для некоторой поверхности (которую они определяют в этом случае с точностью до движения)*.

---

[1]) Чтобы убедиться в последнем, достаточно представить форму в виде

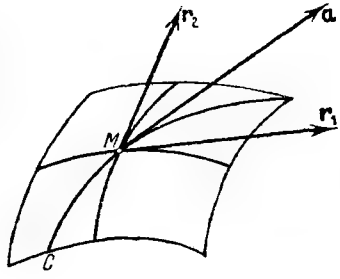
$$\frac{1}{g_{11}}(g_{11}du^1 + g_{12}du^2)^2 + \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}{g_{11}}(du^2)^2.$$

§ 59. Векторы на поверхности.

Переходя к изучению внутренней геометрии поверхности, рассмотрим с этой точки зрения векторы на поверхности. Под вектором на поверхности мы понимаем вектор, заданный в какой-нибудь точке поверхности, лежащий в касательной плоскости в этой точке. Пользуясь тем, что в каждой точке M имеются два вектора, $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, касательных к координатным линиям в этой точке (черт. 117), мы будем всякий касательный вектор $\mathbf{a}$ в точке M разлагать по $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$:

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{r}_1 + a^2\mathbf{r}_2. \tag{547}$$

Через a^1, a^2 мы обозначаем коэфициенты разложения. Мы можем, таким образом, аналитически задавать вектор в данной точке поверхности парой его координат a^1, a^2.



Черт. 117.

Разумеется, при переходе от данной системы криволинейных координат u^1, u^2 на поверхности к какой-нибудь другой системе, координаты a^1, a^2 того же самого вектора $\mathbf{a}$ принимают другие значения, так как векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ становятся другими.

Заметим кстати, что различные другие рассмотренные нами величины: g_{ij}, b_{ij}, G^k_{ij}, также принимают новые значения при переходе к новым координатам u^1, u^2 на поверхности. Изучение соответствующих законов преобразования привело бы нас в область *тензорного анализа*, в которой впервые полностью раскрылся бы смысл индексных обозначений, введенных нами в этой главе. Однако мы не можем здесь этим заниматься, и индексные обозначения останутся для нас лишь орудием сокращенной записи формул.

Допустим, что рассматриваемая поверхность S подвергается изгибанию. *Всякий вектор* $\mathbf{a}$, *касательный к поверхности* S *в какой-нибудь точке* M, *мы условимся преобразовывать при этом следующим образом.* Проведем через точку M какую-нибудь кривую C, лежащую на S и касающуюся вектора $\mathbf{a}$ в точке M. Мы потребуем, чтобы после изгибания поверхности S вместе с лежащими на ней кривой C и точкой M вектор $\mathbf{a}$ продолжал касаться кривой C в точке M, сохраняя при этом прежнюю длину (и указывая прежнее направление вдоль C).

Пусть уравнение кривой C на поверхности S было

$$u^1 = u^1(t), \quad u^2 = u^2(t). \tag{548}$$

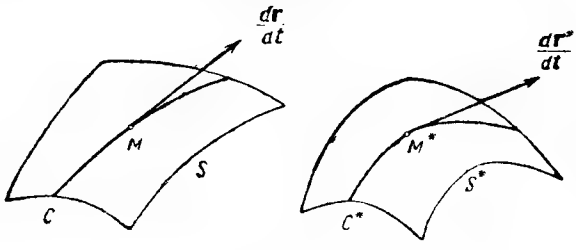
Тогда касательный вектор к кривой C в какой-нибудь точке M, направленный в сторону возрастания параметра t, может быть получен в виде

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}_1\frac{du^1}{dt} + \mathbf{r}_2\frac{du^2}{dt}.$$

Будем теперь изгибать поверхность S, *сохраняя прежние значения* u^1, u^2 *в каждой ее точке*. Тогда уравнение кривой C^* на поверхности S^*, куда перейдет кривая C на S после изгибания, попрежнему имеет вид (548), а касательный вектор к кривой C^* в точке M^* может быть получен в виде

$$\frac{d\mathbf{r}^*}{dt} = \mathbf{r}_1^* \frac{du^1}{dt} + \mathbf{r}_2^* \frac{du^2}{dt}.$$

Мы утверждаем, что вектор $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ в точке M переходит при изгибании именно в вектор $\frac{d\mathbf{r}^*}{dt}$ в соответствующей точке M^* (черт. 118).



Черт. 118.

В самом деле, эти векторы приложены в соответствующих точках M и M^* и направлены по касательным к соответствующим кривым C и C^* в соответствующие стороны — в сторону возрастания t. Остается показать, что длины этих векторов одинаковы. Вычислим скалярные квадраты этих векторов:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 = g_{11}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{du^1}{dt}\frac{du^2}{dt} + g_{22}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2,$$

$$\left(\frac{d\mathbf{r}^*}{dt}\right)^2 = g_{11}^*\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}^*\frac{du^1}{dt}\frac{du^2}{dt} + g_{22}^*\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2.$$

Так как при сохранении прежних u^1, u^2 коэфициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} при изгибании не меняются, то $g_{ij}^* = g_{ij}$, и выписанные выражения совпадают. Итак, $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ вдоль C переходит при изгибании в $\frac{d\mathbf{r}^*}{dt}$ вдоль C^*. Мы замечаем при этом, что коэфициенты разложения $\frac{d\mathbf{r}^*}{dt}$ по $\mathbf{r}_1^*$, $\mathbf{r}_2^*$ равны $\frac{du^1}{dt}$, $\frac{du^2}{dt}$ и совпадают, следовательно, с коэфициентами разложения $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ по $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$. Таким образом *при изгибании поверхности* S *вместе со всевозможными касательными к ней векторами координаты последних* a^1, a^2 *остаются без изменения* (предполагая, что после изгибания каждой точке S отнесены прежние значения u^1, u^2). Этот результат выведен у нас, собственно, для вектора $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ вдоль кривой C, но так как кривую C на поверхности и параметризацию t на C можно выбирать произвольно, то в качестве $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ можно получить любой касательный к поверхности вектор $\mathbf{a}$. В частности, если $a^1 = 1$, $a^2 = 0$, то $\mathbf{a}$ совпадает с $\mathbf{r}_1$, и мы заключаем, что после изгибания ко-

ординаты a^1, a^2 снова равны 1, 0, и следовательно, $\mathbf{r}_1$ переходит после изгибания в $\overset{*}{\mathbf{r}}_1$. То же относится и к $\mathbf{r}_2$.

Введем теперь понятие о *векторном поле* на поверхности. Пусть в каждой точке поверхности нам задан вполне определенный вектор $\mathbf{a}$, касательный к поверхности в этой точке. Аналитически это означает, что координаты вектора $\mathbf{a}$ в каждой точке заданы как функции u^1, u^2:

$$a^1 = a^1(u^1, u^2), \quad a^2 = a^2(u^1, u^2).$$

В этом случае мы говорим, что на поверхности задано векторное поле. Особенно нас интересует частный случай *градиентного векторного поля*. А именно, пусть на поверхности задано *скалярное поле* φ, т. е. каждой точке M отнесено вполне определенное значение величины φ. Аналитически это означает, что φ задана как функция u^1, u^2:

$$\varphi = \varphi(u^1, u^2).$$

Построим теперь в каждой точке поверхности касательный вектор $\mathbf{a}$, определяемый тем требованием, чтобы его скалярные произведения с координатными векторами $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ были равны частным производным $\frac{\partial\varphi}{\partial u^1}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial u^2}$ (последние мы будем обозначать коротко φ_1, φ_2). Итак,

$$\mathbf{a}\mathbf{r}_1 = \varphi_1, \quad \mathbf{a}\mathbf{r}_2 = \varphi_2. \tag{549}$$

Покажем, что такой вектор всегда можно построить. Пусть a^1, a^2 — его координаты; тогда

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{r}_1 + a^2\mathbf{r}_2$$

и условия (549), если учесть, что $\mathbf{r}_i\mathbf{r}_j = g_{ij}$, примут вид

$$g_{11}a^1 + g_{12}a^2 = \varphi_1, \quad g_{21}a^1 + g_{22}a^2 = \varphi_2.$$

Эти два уравнения однозначно разрешаются относительно a^1, a^2:

$$\left.\begin{aligned} a^1 &= \frac{g_{22}\varphi_1 - g_{12}\varphi_2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = g^{11}\varphi_1 + g^{12}\varphi_2, \\ a^2 &= \frac{-g_{12}\varphi_1 + g_{11}\varphi_2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = g^{21}\varphi_1 + g^{22}\varphi_2. \end{aligned}\right\} \tag{550}$$

Таким образом вектор $\mathbf{a}$ однозначно определяется в каждой точке. Однако мы еще не можем утверждать, что $\mathbf{a}$ образует векторное поле на поверхности, так как в понятии поля подразумевается, что значение рассматриваемой величины (вектора $\mathbf{a}$, скаляра φ и т. д.), определяясь выбором точки на поверхности, не зависит при этом от выбора системы координат u^1, u^2 на поверхности. Между тем в нашем определении $\mathbf{a}$ посредством требований (549) это неясно. Покажем, что вектору $\mathbf{a}$ в каждой точке поверхности можно дать и чисто геометрическое определение, при котором его независимость от выбора координат на поверхности будет ясна.

Пусть через данную точку M проходит произвольная кривая C по поверхности, отнесенная к длине дуги. Тогда, рассматривая вдоль этой кривой значение величины φ как функцию от s, можно взять производную

$$\frac{d\varphi}{ds} = \varphi_1 \frac{du^1}{ds} + \varphi_2 \frac{du^2}{ds}.$$

Так как вектор $\mathbf{a}$ удовлетворяет условиям (549), то можно переписать $\frac{d\varphi}{ds}$ в виде

$$\frac{d\varphi}{ds} = \mathbf{a}\mathbf{r}_1 \frac{du^1}{ds} + \mathbf{a}\mathbf{r}_2 \frac{du^2}{ds} = \mathbf{a}\left(\mathbf{r}_1 \frac{du^1}{ds} + \mathbf{r}_2 \frac{du^2}{ds}\right) = \mathbf{a}\frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

или окончательно

$$\frac{d\varphi}{ds} = \mathbf{a}\mathbf{t}, \tag{551}$$

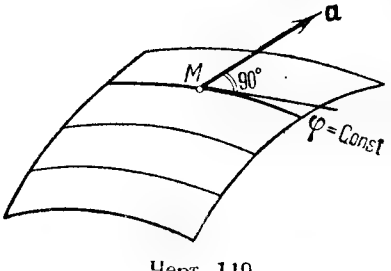
где $\mathbf{t}$ — единичный касательный вектор к кривой C, направленный в сторону отсчета дуги s.

Итак, *скорость изменения величины φ по отношению к пути, проходимому по кривой C, равна в каждой точке проекции вектора $\mathbf{a}$ на положительное направление касательной к кривой C.*

Отсюда легко дать геометрическое определение вектора $\mathbf{a}$. Если взять в качестве C линию уровня скалярного поля φ

$$\varphi(u^1, u^2) = \text{const},$$

то левая часть (551) обращается в нуль и, следовательно, $\mathbf{a}$ ортогонально к $\mathbf{t}$. Другими словами, вектор $\mathbf{a}$ в каждой точке поверхности направлен по нормали к линии уровня φ.



Черт. 119.

Если взять теперь в качестве C кривую, касающуюся вектора $\mathbf{a}$ в данной точке, и отсчитывать по ней дугу s в сторону $\mathbf{a}$, то $\mathbf{t}$ будет направлено в сторону $\mathbf{a}$, так что

$$\mathbf{t}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|$$

и (551) принимает вид

$$\frac{d\varphi}{ds} = |\mathbf{a}|.$$

Мы видим, что $|\mathbf{a}|$ имеет геометрический смысл скорости изменения φ по отношению к s в направлении, ортогональном линии уровня. Наконец, эта же формула показывает, что $\frac{d\varphi}{ds} > 0$, φ растет вместе с s, т. е. в сторону $\mathbf{a}$.

Итак, $\mathbf{a}$ *строится в каждой точке поверхности как касательный вектор, нормальный к линии уровня φ, направленный в сторону возрастания φ и по длине равный скорости изменения φ относительно s в нормальном к линии уровня направлении* (черт. 119).

Это построение показывает, что **a** определяется независимо от выбора системы координат u^1, u^2 на поверхности и образует инвариантное векторное поле на поверхности. Такое векторное поле **a** называется *градиентным* по отношению к скалярному полю φ.

Из этого же построения ясно, что при изгибании поверхности вместе со скалярным полем φ и векторным полем **a** последнее остается градиентным по отношению к φ.

Вычислим, наконец, для двух данных скалярных полей $\varphi(u^1, u^2)$ и $\psi(u^1, u^2)$ скалярное произведение отвечающих им градиентных векторов **a**, **b**.

Полученную величину будем обозначать через $\nabla(\varphi, \psi)$. Возьмем разложение вектора **a**

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{r}_1 + a^2\mathbf{r}_2$$

и умножим скалярно обе части равенства на **b**. Получим

$$\nabla(\varphi, \psi) = \mathbf{ab} = a^1\mathbf{r}_1\mathbf{b} + a^2\mathbf{r}_2\mathbf{b}.$$

Пользуясь условиями (549) в применении к **b** как градиенту ψ, переписываем это равенство в виде

$$\nabla(\varphi, \psi) = \mathbf{ab} = a^1\psi_1 + a^2\psi_2.$$

Вставляя сюда выражения (550) для a^1, a^2, получим окончательно

$$\nabla(\varphi, \psi) = \mathbf{ab} = \frac{g_{22}\varphi_1\psi_1 - g_{12}(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1) + g_{11}\varphi_2\psi_2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} =$$

$$= g^{11}\varphi_1\psi_1 + g^{12}\varphi_1\psi_2 + g^{21}\varphi_2\psi_1 + g^{22}\varphi_2\psi_2 = g^{\alpha\beta}\varphi_\alpha\psi_\beta. \qquad (552)$$

Как и сами векторы **a**, **b**, это выражение зависит только от точки на поверхности, но не зависит от выбора на поверхности системы криволинейных координат. Мы получаем, таким образом, новое скалярное поле на поверхности, выведенное из данных полей $\varphi(u^1, u^2)$, $\psi(u^1, u^2)$.

В частности, если $\psi(u^1, u^2) = \varphi(u^1, u^2)$, то $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ и

$$\nabla(\varphi, \varphi) = \mathbf{a}^2 = g^{11}(\varphi_1)^2 + 2g^{12}\varphi_1\varphi_2 + g^{22}(\varphi_2)^2. \qquad (552')$$

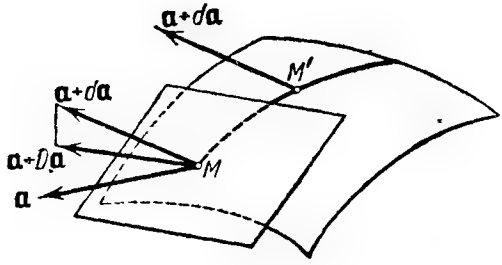
Выражение (552′) называется *первым дифференциальным параметром* по отношению к $\varphi(u^1, u^2)$ и обозначается коротко $\nabla(\varphi)$. Так как при изгибании поверхности вместе с полями φ, ψ и векторами **a**, **b** длины векторов **a**, **b** и углы между ними не меняются, причем **a**, **b** остаются градиентами φ, ψ, то $\nabla(\varphi, \psi)$ *есть инвариант изгибания*.

§ 60. Параллельное перенесение векторов на поверхности.

Когда мы говорим о векторе в пространстве, мы обычно имеем в виду свободный вектор, т. е. вектор, который можно откладывать в любой точке пространства. Эта точка зрения естественна, так как в пространстве вектор всегда можно параллельно перенести из одной точки в другую.

Что же касается вектора на поверхности, то мы определяем его как вектор, касательный к поверхности в данной ее точке; мы *связываем его с определенной точкой поверхности*. Это делается не случайно, так как если бы мы параллельно перенесли вектор из одной точки поверхности в другую, то там он был бы направлен, вообще говоря, под углом к касательной плоскости и не мог бы рассматриваться поэтому как вектор на поверхности. Следовательно, понятие свободного вектора, или, что то же, параллельного перенесения вектора из любой точки в любую, теряет смысл для векторов на поверхности. Задачей этого параграфа является установление понятия параллельного перенесения для векторов на поверхности по крайней мере в бесконечно малом.

Пусть вдоль какой-нибудь кривой $u^1(t)$, $u^2(t)$ на поверхности задано векторное поле, т. е. в каждой точке t этой кривой указан вектор $\mathbf{a}(t)$, касательный к поверхности в этой точке. Пусть при переходе из точки M на кривой в ее бесконечно близкую точку M' вектор $\mathbf{a}$ получает приращение, равное (в своей главной части) $d\mathbf{a}$. Рассмотрение этого дифференциала не имеет смысла с точки зрения векторов на поверхности, так как $d\mathbf{a}$ не является вектором, касательным к поверхности. Чтобы построить понятие о дифференциале вектора $\mathbf{a}$, укладывающееся в рамки теории векторов на поверхности, мы поступим следующим образом.



Черт. 120.

Отложим $\mathbf{a}+d\mathbf{a}$ из точки M; этот вектор выйдет тогда, вообще говоря, из касательной плоскости в точке M. Следовательно, он не может быть рассматриваем как вектор на поверхности. Разложим его на составляющие: одну, лежащую в касательной плоскости, и другую, направленную по нормали $\mathbf{m}$ к поверхности (черт. 120).

Составляющая по нормали будет, очевидно, равна скалярному произведению $\mathbf{m}(\mathbf{a}+d\mathbf{a})$, т. е. проекции $\mathbf{a}+d\mathbf{a}$ на единичный вектор $\mathbf{m}$, умноженному на вектор $\mathbf{m}$:

$$\{\mathbf{m}(\mathbf{a}+d\mathbf{a})\}\mathbf{m}.$$

Так как $\mathbf{a}$ касателен к поверхности в точке M, то $\mathbf{ma}=0$ и окончательно нормальная составляющая вектора $\mathbf{a}+d\mathbf{a}$ примет вид

$$(\mathbf{m}\,d\mathbf{a})\,\mathbf{m}.$$

Отнимая от $\mathbf{a}+d\mathbf{a}$ его нормальную составляющую, мы получаем тангенциальную составляющую, т. е. вектор, полученный в ортогональной проекции $\mathbf{a}+d\mathbf{a}$ на касательную плоскость в точке M:

$$(\mathbf{a}+d\mathbf{a})_t=\mathbf{a}+d\mathbf{a}-(\mathbf{m}\,d\mathbf{a})\,\mathbf{m}.$$

Этот вектор уже является вектором на поверхности, так как он лежит в касательной плоскости в точке M. Разность между $(\mathbf{a}+d\mathbf{a})_1$ и вектором $\mathbf{a}$ в точке M мы будем называть *абсолютным дифференциалом* вектора $\mathbf{a}$ при переходе из точки M в точку M' и обозначать через $D\mathbf{a}$:

$$D\mathbf{a} = d\mathbf{a} - (\mathbf{m}\, d\mathbf{a})\,\mathbf{m}. \tag{553}$$

Итак, *абсолютный дифференциал* $D\mathbf{a}$ *равен тому приращению* (точнее, его главной части, дифференциалу), *которое получает вектор* $\mathbf{a}$ *при переходе из* M *в* M', *если в приращении учитывать только касательную к поверхности в точке* M *составляющую и откинуть составляющую по нормали.* Абсолютный дифференциал вектора $\mathbf{a}$ в точке M есть, таким образом, снова вектор, касательный к поверхности в точке M.

Особенно важен частный случай, когда $D\mathbf{a}=0$. Это означает, что при переходе из M в M' дифференциал $d\mathbf{a}$ целиком направлен по нормали $\mathbf{m}$, или, другими словами, *при проектировании* $\mathbf{a}+d\mathbf{a}$ *на касательную плоскость в точке* M *мы получаем исходное значение вектора* $\mathbf{a}$ *в точке* M. В этом случае мы будем говорить, что *вектор* $\mathbf{a}+d\mathbf{a}$ *есть вектор* $\mathbf{a}$, *параллельно перенесенный из точки* M *в бесконечно близкую точку* M'. Таким образом у нас определено параллельное перенесение вектора $\mathbf{a}$ из точки M в бесконечно близкую точку M' на поверхности. Для этого нужно в касательной плоскости в точке M' подобрать вектор, превращающийся в вектор $\mathbf{a}$ при проектировании его на касательную плоскость в точке M.

Переходим к аналитической записи абсолютного дифференциала. Пусть вдоль рассматриваемой кривой в каждой точке t координаты вектора $\mathbf{a}(t)$, т. е. коэфициенты его разложения по векторам $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, будут $a^1(t)$, $a^2(t)$. Итак,

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{r}_1 + a^2\mathbf{r}_2,$$

где $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ — координатные векторы поверхности в той же точке t.

Вычисляем $d\mathbf{a}$:

$$d\mathbf{a} = da^1\mathbf{r}_1 + da^2\mathbf{r}_2 + a^1(\mathbf{r}_{11}du^1 + \mathbf{r}_{12}du^2) + a^2(\mathbf{r}_{12}du^1 + \mathbf{r}_{22}du^2).$$

Воспользуемся деривационными формулами Гаусса (528):

$$d\mathbf{a} = da^1\mathbf{r}_1 + da^2\mathbf{r}_2 + a^1\{(G_{11}^1\mathbf{r}_1 + G_{11}^2\mathbf{r}_2)\,du^1 + (G_{12}^1\mathbf{r}_1 + G_{12}^2\mathbf{r}_2)\,du^2\} +$$
$$+ a^2\{(G_{12}^1\mathbf{r}_1 + G_{12}^2\mathbf{r}_2)\,du^1 + (G_{22}^1\mathbf{r}_1 + G_{22}^2\mathbf{r}_2)\,du^2\} + \ldots$$

Точками обозначены члены, содержащие вектор $\mathbf{m}$ и образующие нормальную составляющую вектора $d\mathbf{a}$. Откидывая эту нормальную составляющую и оставляя лишь явно выписанные члены, мы получаем вместо $d\mathbf{a}$ абсолютный дифференциал $D\mathbf{a}$. Объединяя коэфициенты при $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, запишем

$$D\mathbf{a} = \mathbf{r}_1(da^1 + G_{11}^1a^1du^1 + G_{12}^1a^1du^2 + G_{21}^1a^2du^1 + G_{22}^1a^2du^2) +$$
$$+ \mathbf{r}_2(da^2 + G_{11}^2a^1du^1 + G_{12}^2a^1du^2 + G_{21}^2a^2du^1 + G_{22}^2a^2du^2)$$

Абсолютный дифференциал $D\mathbf{a}$ получится прямо в разложении по координатным векторам $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$. Следовательно, выражения в круглых скобках суть координаты абсолютного дифференциала; их мы будем обозначать Da^1, Da^2. Итак,

$$\left.\begin{aligned} Da^1 &= da^1 + G^1_{\alpha\beta}a^\alpha du^\beta, \\ Da^2 &= da^2 + G^2_{\alpha\beta}a^\alpha du^\beta. \end{aligned}\right\} \tag{554}$$

В правой части мы использовали сокращенную запись суммирования, развернув которую, мы вернемся к прежним выражениям в круглых скобках. Итак, у нас получены координатные выражения абсолютного дифференциала.

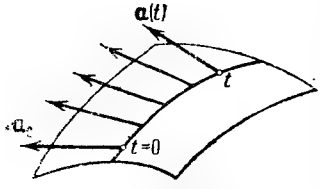
В частности, если вектор $\mathbf{a}$ перенесен параллельно, т. е. если $D\mathbf{a} = 0$, то и координаты $D\mathbf{a}$ обращаются в нуль и из (554) мы получаем

$$\left.\begin{aligned} da^1 &= -G^1_{\alpha\beta}a^\alpha du^\beta, \\ da^2 &= -G^2_{\alpha\beta}a^\alpha du^\beta. \end{aligned}\right\} \tag{555}$$

Такова аналитическая запись параллельного перенесения вектора $\mathbf{a}$ из M в бесконечно близкую точку M'. Дифференциалы координат вектора $\mathbf{a}$ при этом параллельном перенесении выражены через его координаты a^1, a^2 в точке M, через величины G^k_{ij} в точке M и, наконец, через дифференциалы координат du^1, du^2, отвечающие бесконечно малому смещению из точки M в M' по поверхности.

§ 61. Свойства параллельного перенесения.

До сих пор мы рассматривали параллельное перенесение на поверхности лишь в бесконечно малом. Теперь нетрудно ввести это перенесение и в конечном, но *при условии наперед заданного пути перенесения.*



Черт. 121.

Пусть снова на поверхности задана кривая $u^1(t)$, $u^2(t)$, в начальной точке которой $u^1(0)$, $u^2(0)$ построен какой-нибудь касательный к поверхности вектор $\mathbf{a}_0$. Мы скажем, что совершенно *параллельное перенесение вектора* $\mathbf{a}_0$ *вдоль кривой, если в каждой точке кривой* t *построен касательный к поверхности вектор* $\mathbf{a}(t)$ *так, что при переходе от точки* t *к* $t+dt$ *вектор* $\mathbf{a}+d\mathbf{a}$ *есть параллельно перенесенный вектор* $\mathbf{a}$, *т. е. при любом значении* t *дифференциал* $d\mathbf{a}(t)$ параллелен нормали $\mathbf{n}$ в соответствующей точке поверхности; *при этом в начальной точке* $t=0$, *вектор* $\mathbf{a}(t)$ *совпадает с* $\mathbf{a}_0$ (черт. 121).

Другими словами: вектор-функция $\mathbf{a}(t)$ должна быть построена таким образом, чтобы ее координаты $a^1(t)$, $a^2(t)$ удовлетворяли при любом переходе от t к $t+dt$ условиям (555), выражающим параллельное

перенесение на бесконечно малом участке; иначе говоря, функции $a^1(t)$, $a^2(t)$ должны удовлетворять дифференциальным уравнениям, получающимся из (555) после деления на dt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{da^1}{dt} &= -G^1_{\alpha\beta}a^\alpha\frac{du^\beta}{dt},\\ \frac{da^2}{dt} &= -G^2_{\alpha\beta}a^\alpha\frac{du^\beta}{dt}.\end{aligned}\right\} \tag{556}$$

Мы имеем здесь нормальную систему двух линейных относительно $a^1(t)$, $a^2(t)$ дифференциальных уравнений. Действительно, производные от a^1, a^2 по t выражены, как показывают правые части, линейно относительно a^1, a^2; коэфициентами же при a^1, a^2 служат известные нам функции t; вдоль кривой мы знаем u^1, u^2 (и их производные) как функции от t, что же касается величин G^k_{ij}, то они на данной поверхности — определенные функции от u^1, u^2, следовательно, вдоль кривой — определенные функции от t.

Сверх того, при $t=0$ искомые функции a^1, a^2 должны принимать наперед заданные значения a^1_0, a^2_0 координат вектора $\mathbf{a}_0$.

Из нормальной системы (556) и начальных условий функции $a^1(t)$, $a^2(t)$ определяются однозначно (как доказывается в теории дифференциальных уравнений). Итак, параллельное перенесение данного вектора вдоль данной кривой на поверхности всегда можно осуществить и при этом однозначно.

Однако здесь есть существенная разница в сравнении с параллельным перенесением векторов в пространстве (или на плоскости). А именно, у нас нет никакой гарантии, что, перенося данный вектор $\mathbf{a}_0$ из точки M_0 в точку M вдоль какого-нибудь пути, мы будем приходить в точку M с одним и тем же вектором независимо от выбора пути M_0M. Напротив, более детальное исследование покажет нам, что за исключением развертывающихся поверхностей, на всех остальных *результат параллельного перенесения вектора на поверхности зависит не только от исходного значения вектора* $\mathbf{a}_0$, *начальной точки* M_0 *и конечной точки* M *пути перенесения, но и от выбора самого пути перенесения.*

Выведем теперь одно очень существенное свойство параллельного перенесения векторов на поверхности, сближающее это перенесение с обычным. А именно, если в начальной точке $t=0$ задать не один вектор $\mathbf{a}_0$, а рассмотреть всевозможные касательные к поверхности векторы и подвергнуть их затем все параллельному перенесению вдоль кривой на поверхности, то *длины этих векторов и углы между ними сохраняются без изменения.* Другими словами, если представлять себе, что касательная плоскость к поверхности в начальной точке $t=0$ образована всевозможными векторами, касательными к поверхности в этой точке, то при параллельном перенесении этих векторов касательная плоскость перемещается как твердое тело (совпадая последовательно с касательными плоскостями во всех точках пути перенесения).

Для доказательства достаточно показать, что скалярное произведение двух каких-нибудь векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, касательных к поверхности в данной точке, сохраняет постоянное значение при параллельном перенесении этих векторов вдоль какого-нибудь пути на поверхности. Составим скалярное произведение $\mathbf{ab}$ и вычислим его дифференциал, отвечающий бесконечно малому смещению по пути параллельного перенесения:

$$d(\mathbf{ab}) = d\mathbf{a}\,\mathbf{b} + \mathbf{a}\,d\mathbf{b}.$$

Так как $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ переносятся параллельно, то $d\mathbf{a}$ и $d\mathbf{b}$ направлены по нормали к поверхности (их касательные составляющие $D\mathbf{a}$, $D\mathbf{b}$ равны нулю). Следовательно, $d\mathbf{a}$, $d\mathbf{b}$ перпендикулярны касательным к поверхности векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, и мы получаем

$$d(\mathbf{ab}) = 0, \quad \mathbf{ab} = \text{const}.$$

В частности, остаются постоянными скалярные произведения $\mathbf{aa}$, $\mathbf{bb}$, а значит и длины $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, а также $\cos(\mathbf{ab})$, равный $\frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}$.

Каким образом при параллельном перенесении сохраняется длина переносимого вектора $\mathbf{a}$, в то время как при каждом бесконечно малом смещении $\mathbf{a}$ оказывается проекцией $\mathbf{a} + d\mathbf{a}$ и, следовательно, „короче“ его? Дело здесь в том, что $d\mathbf{a}$ не есть точное приращение $\Delta\mathbf{a}$ переносимого вектора $\mathbf{a}$, а лишь главная часть этого приращения. Поэтому, хотя $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}$ действительно одинаковой длины, $\mathbf{a} + d\mathbf{a}$ отличается от них по длине („длиннее“ их), но на бесконечно малую второго порядка.

В заключение параграфа докажем следующую важную теорему:

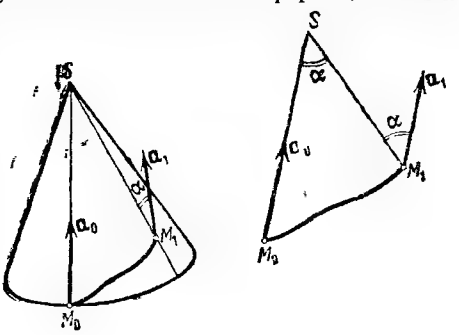
Абсолютное дифференцирование и параллельное перенесение векторов на поверхности принадлежат к внутренней геометрии поверхности; другими словами, эти операции инвариантны относительно изгибания поверхности.

Эта теорема не только не самоочевидна, но представляется на первый взгляд даже маловероятной. Действительно, при абсолютном дифференцировании вектор-функции $\mathbf{a}(t)$, как кажется, играет существенную роль форма поверхности в пространстве, меняющаяся при изгибании. Мы хотим доказать, что вопреки этому абсолютное дифференцирование будет давать прежний результат. Более точно: при изгибании поверхности S определенным образом преобразуются (§ 59) и заданные на ней векторы; в частности, векторы поля $\mathbf{a}(t)$, заданного вдоль какой-нибудь кривой C, образуют после изгибания поле $\mathbf{a}^*(t)$ вдоль соответствующей кривой C^* на преобразованной поверхности S^*. Аналогично и абсолютные дифференциалы $D\mathbf{a}$ поля $\mathbf{a}(t)$ преобразуются при изгибании S в какие-то векторы в соответствующих точках поверхности S^*.

Мы утверждаем теперь, — и в этом заключается сущность теоремы, — что *при изгибании S абсолютные дифференциалы $D\mathbf{a}$ поля $\mathbf{a}(t)$ вдоль C преобразуются в соответствующие абсолютные дифференциалы $D^*\mathbf{a}^*$ поля $\mathbf{a}^*(t)$ вдоль C^**. Именно это мы понимаем под инвариантностью абсолютного дифференцирования относительно изгибания.

Переходя к доказательству, предположим, что при изгибании мы сохраняем прежние значения u^1, u^2 у каждой точки, т. е. преобразованные точки на S^* имеют те же значения u^1, u^2, что и отвечающие им исходные точки на S. В этом случае, как доказано в § 59, координаты преобразованных векторов остаются прежними. Поэтому вектор-функция $\mathbf{a}^*(t)$, заданная вдоль кривой C^*, имеет в разложении по $\mathbf{r}_1^*$, $\mathbf{r}_2^*$ те же координаты $a^1(t)$, $a^2(t)$, что и исходная вектор-функция $\mathbf{a}(t)$, заданная вдоль C в разложении по $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$. Кроме того, как известно из § 55, в наших предположениях функциональная зависимость g_{ij} от u^1, u^2 остается при изгибании поверхности прежней, следовательно, в соответствующих точках величины G_{ij}^k сохраняют прежние значения.

Обращаясь теперь к формулам (554), мы имеем право понимать теперь в них под G_{ij}^k символы Христофеля второго рода в соответствующих точках и на поверхности S и на поверхности S^*; под du^1, du^2 — диференциалы координат при соответствующих бесконечно малых смещениях и вдоль C и вдоль C^*; под a^1, a^2 — координаты векторных полей и $\mathbf{a}(t)$ вдоль C и $\mathbf{a}^*(t)$ вдоль C^* (в соответствующих точках). Другими словами, правые части (554) не изменятся, если вместо смещения по кривой C взять соответствующее смещение по кривой C^* и вместо поля $\mathbf{a}(t)$ вдоль C рассмотреть соответствующее поле $\mathbf{a}^*(t)$ вдоль C^*. Следовательно, и левые части сохраняют прежние значения, т. е. *координаты* $D\mathbf{a}$ *не изменились от того, что* $D\mathbf{a}$ *вычислен не для поля* $\mathbf{a}(t)$ *вдоль* C *на* S, *а для поля* $\mathbf{a}^*(t)$ *вдоль* C^* *на изогнутой поверхности* S^*. Но раз соответствующие абсолютные диференциалы $D\mathbf{a}$ и $D^*\mathbf{a}^*$ на поверхностях S и S^* имеют одинаковые координаты, то в наших предположениях это означает (см. стр. 308), что $D\mathbf{a}$ при изгибании поверхности переходит в $D^*\mathbf{a}^*$. Теорема доказана.



Черт. 122.

Итак, если сначала поле $\mathbf{a}(t)$ изогнуть вместе с S на поверхность S^* и там взять его абсолютный диференциал, то результат $D^*\mathbf{a}^*$ будет тот же, как если взять сначала $D\mathbf{a}$ на поверхности S, а потом изогнуть $D\mathbf{a}$ вместе с S на поверхность S^*. В частности, отсюда следует, что если $D\mathbf{a} = 0$, т. е. если вектор-функция $\mathbf{a}(t)$ выражает параллельное перенесение вектора вдоль кривой, то и $D^*\mathbf{a}^* = 0$, т. е. после изгибания вместе с поверхностью S векторов $\mathbf{a}(t)$ они продолжают уже на поверхности S^* изображать параллельное перенесение вектора вдоль соответствующей кривой. *Параллельное перенесение инвариантно относительно изгибания.*

Приведем пример, где применяется эта теорема. Рассмотрим поверхность прямого круглого конуса (черт. 122); пусть требуется пере-

нести параллельно вектор $\mathbf{a}_0$ из точки M_0 в точку M_1 по какому-нибудь пути M_0M_1. Для простоты возьмем $\mathbf{a}_0$ направленным по образующей и будем считать, что путь M_0M_1 встречает каждую образующую конуса не более одного раза. Возьмем кусок конической поверхности SM_0M_1S и развернем его на плоскость; он примет вид треугольника SM_0M_1 с криволинейной стороной M_0M_1. Перенося вектор $\mathbf{a}_0$ из M_0 в M_1 уже на плоскости, мы приходим в точку M_1 с вектором $\mathbf{a}_1$, который направлен к образующей M_1S под углом α, где α — угол M_0SM_1. Если теперь, обратно, навернуть плоский треугольник на конус, то по нашей теореме параллельно перенесенный вектор останется параллельно перенесенным и, следовательно, вектор $\mathbf{a}_1$ уже на конусе, направленный под углом α к образующей M_1S, будет играть роль параллельно перенесенного вдоль пути M_0M_1 вектора $\mathbf{a}_0$.

В частности, при обнесении вектора $\mathbf{a}_0$ вокруг основания конуса он вернется в прежнюю точку, уклонившись от прежнего направления на угол, равный $\frac{2\pi r}{l}$, где r — радиус основания конуса, а $l = SM_0$ — длина образующей.

Заметим еще следующее: пусть две поверхности S_1 и S_2 касаются друг друга вдоль данной кривой C и имеют, следовательно, вдоль этой кривой общие нормали; тогда из определения параллельного перенесения вытекает без труда, что параллельное перенесение векторов вдоль кривой C на поверхности S_1 будет служить в то же время и параллельным перенесением на поверхности S_2. Пользуясь этим соображением, легко осуществить, например, параллельное перенесение векторов вдоль параллели на какой-нибудь поверхности вращения.

Для этого достаточно построить прямой круглый конус с той же осью вращения, касающийся поверхности вращения по этой параллели, и осуществить искомое перенесение на конусе.

§ 62. Внутренняя (или геодезическая) кривизна кривых на поверхности.

Возьмем на поверхности какую-нибудь кривую C, причем в качестве поля $\mathbf{a}(t)$ вдоль этой кривой рассмотрим поле ее единичных касательных векторов $\mathbf{t}$. Тогда по первой формуле Френе $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = k\mathbf{n}$, где k — кривизна кривой C, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор по ее главной нормали.

Диференциал $d\mathbf{t}$ мы разложим на касательную к поверхности составляющую — абсолютный диференциал $D\mathbf{t}$ — и нормальную составляющую $\mathbf{m}(\mathbf{m}\,d\mathbf{t})$. Тогда вектор $k\mathbf{n}$ распадется на два слагаемых:

$$k\mathbf{n} = \frac{D\mathbf{t}}{ds} + \mathbf{m}\left(\mathbf{m}\,\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right).$$

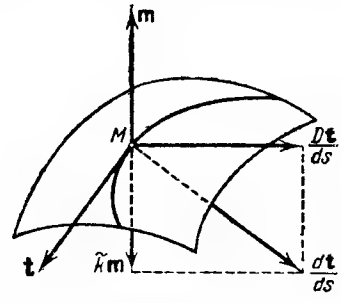
Заменяя в правой части $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ через $k\mathbf{n}$ и учитывая, что $\mathbf{nm} = \cos\theta$, где $\theta = \widehat{\mathbf{mn}}$, получим

$$k\mathbf{n} = \frac{D\mathbf{t}}{ds} + \mathbf{m}k\cos\theta.$$

Но по теореме Менье $k\cos\theta = \tilde{k}$, где $\tilde{k}$ — кривизна нормального сечения с той же касательной $\mathbf{t}$, так что окончательно

$$k\mathbf{n} = \frac{D\mathbf{t}}{ds} + \tilde{k}\mathbf{m}. \tag{557}$$

Таким образом вектор $k\mathbf{n}$ (его часто называют вектором кривизны данной кривой) распался на касательную к поверхности составляющую $\frac{D\mathbf{t}}{ds}$ — *вектор внутренней (или геодезической) кривизны* кривой C на поверхности — и на нормальную составляющую $\tilde{k}\mathbf{m}$ — *вектор вынужденной (или нормальной) кривизны* кривой C на поверхности (черт. 123).



Черт. 123.

Длина вектора $\frac{D\mathbf{t}}{ds}$ называется *внутренней* [1]), *или геодезической кривизной* кривой C на поверхности:

$$k_{\text{вн}} = \left|\frac{D\mathbf{t}}{ds}\right|.$$

Так как $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ ортогональны к $\mathbf{t}$, то, как следует из формулы (557), $\frac{D\mathbf{t}}{ds}$ тоже ортогонален к $\mathbf{t}$. А так как $\frac{D\mathbf{t}}{ds}$, кроме того, лежит в касательной плоскости, то он коллинеарен с вектором $[\mathbf{m}, \mathbf{t}]$, т. е. с вектором $\mathbf{t}$, повернутым в касательной плоскости на 90°.

Запишем, что $\frac{D\mathbf{t}}{ds}$ отличается от $[\mathbf{m}, \mathbf{t}]$ лишь скалярным множителем, который мы обозначим через $\tilde{k}_{\text{вн}}$:

$$\frac{D\mathbf{t}}{ds} = \tilde{k}_{\text{вн}}[\mathbf{m}, \mathbf{t}].$$

Так как $[\mathbf{m}, \mathbf{t}]$ — единичный вектор, то модуль $\tilde{k}_{\text{вн}}$ совпадает с модулем $\frac{D\mathbf{t}}{ds}$, т. е. с внутренней кривизной кривой. Таким образом, $k_{\text{вн}}$ есть

---

[1]) Названия эти объясняются следующими причинами. При изгибании поверхности вместе с касательными к ней векторами вектор $D\mathbf{t}$ преобразуется, как мы знаем, снова в вектор $D\mathbf{t}$ вдоль соответствующей кривой уже на изогнутой поверхности. Так как, кроме того, ds остается при изгибании неизменным, то вектор внутренней кривизны $\frac{D\mathbf{t}}{ds}$ после изгибания переходит вновь в вектор внутренней кривизны для соответствующей кривой на изогнутой поверхности. В этом смысле *понятие о векторе внутренней кривизны инвариантно относительно изгибания и принадлежит, следовательно, к внутренней геометрии поверхности.*

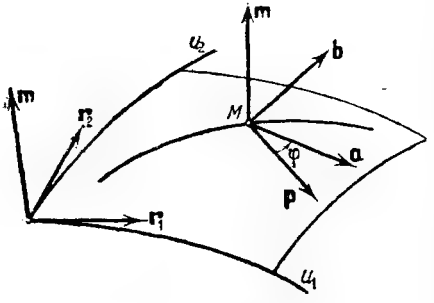
Так как при изгибании поверхности длины всех векторов на ней остаются без изменения, то $\frac{D\mathbf{t}}{ds}$ тоже сохранит прежнюю длину; значит *внутренняя*

внутренняя кривизна кривой, снабженная знаком (зависящим от направления отсчета дуги s вдоль кривой).

Умножая обе части выписанного равенства на $[\mathbf{m}, \mathbf{t}]$ скалярно, получим

$$\widetilde{k}_{\text{вн}} = \left(\mathbf{m}\mathbf{t}\frac{D\mathbf{t}}{ds}\right). \tag{557'}$$

К понятию внутренней кривизны можно подойти и *с другой точки зрения* [1]). Рассмотрим сначала более общую задачу. Пусть вдоль кривой C задано поле единичного вектора $\mathbf{a}$ и поле единичного вектора $\mathbf{p}$, параллельно переносимого по поверхности вдоль C. Разумеется, в каждой точке M на кривой C заданные там векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{p}$ касаются поверхности (черт. 124). Пусть φ — угол от $\mathbf{p}$ до $\mathbf{a}$ [примем раз навсегда за положительное направление отсчета углов направление вращения от $\mathbf{r}_1$ к $\mathbf{r}_2$ по углу, меньшему π; кроме того, будем направлять $\mathbf{m}$ в сторону векторного произведения $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$ (черт. 124)].



Черт. 124.

Нас интересует дифференциал $d\varphi$ угла φ при бесконечно малом смещении по кривой C. Другими словами, мы хотим знать, насколько повернется вектор $\mathbf{a}$ *по отношению к параллельно переносимому вектору* $\mathbf{p}$, когда мы перейдем из M в бесконечно близкую точку M'. Весьма существенно, что этот поворот не зависит от выбора параллельно переносимого вектора $\mathbf{p}$. Так как все такие параллельно переносимые вдоль C векторы сохраняют между собой постоянные углы, то *относительно всех их* вектор $\mathbf{a}$ окажется повернутым на один и тот же угол. Этот угол мы будем называть *углом геодезического поворота вектора* $\mathbf{a}$.

кривизна есть величина, инвариантная при изгибании. Таким образом внутренняя кривизна зависит от формы кривой C на поверхности, но не зависит от формы поверхности в пространстве, если изменение формы поверхности происходит в результате изгибания. Напротив, вектор вынужденной кривизны $\widetilde{k}\mathbf{m}$ связан с формой поверхности в пространстве, и само название указывает, что наличие этого вектора связано не с формой кривой C на поверхности, а вынуждается искривленностью самой поверхности в пространстве. Действительно, этот вектор направлен по нормали к поверхности, длина же его $|\widetilde{k}|$ совпадает с кривизной нормального сечения с той же касательной, что и у кривой C. Таким образом здесь играет роль лишь искривленность самой поверхности в данном направлении. Конечно, при изгибании и связанном с ним изменении формы поверхности вынужденная кривизна $\widetilde{k}$, вообще говоря, меняет свое значение, в отличие от внутренней кривизны $\widetilde{k}_{\text{вн}}$.

[1]) Последующие построения, кончая формулой (559), могут быть опущены при первом чтении.

В целях вычисления $d\varphi$ запишем, что

$$\cos\varphi = \mathbf{ap},$$

(в правой части — скалярное произведение единичных векторов). Дифференцируем вдоль кривой C:

$$-\sin\varphi\, d\varphi = d\mathbf{a}\,\mathbf{p} + \mathbf{a}\,d\mathbf{p}.$$

Так как $\mathbf{p}$ параллельно переносится, то $d\mathbf{p}$ параллелен нормали $\mathbf{m}$ и в скалярном произведении с касательным вектором $\mathbf{a}$ дает нуль. Последний член пропадает. Далее, вместо $d\mathbf{a}$ можно поставить его касательную составляющую $D\mathbf{a}$, так как нормальная составляющая в скалярном произведении с касательным вектором $\mathbf{p}$ дает нуль. Итак,

$$-\sin\varphi\, d\varphi = \mathbf{p}\, D\mathbf{a}. \tag{558}$$

Построим в данной точке M на кривой C вектор $\mathbf{b}$, представляющий собой вектор $\mathbf{a}$, повернутый в касательной плоскости на $+90°$. Очевидно

$$\mathbf{b} = [\mathbf{m}, \mathbf{a}].$$

Представим себе в какой-нибудь точке кривой C пучок всевозможных векторов, касательных к поверхности, и будем все эти векторы переносить параллельно вдоль C. В качестве $\mathbf{p}$ можно взять любой из этих векторов, в частности тот, который в данной точке M совпадет с вектором $\mathbf{b}$. Тогда в точке M угол φ равен $-90°$, и формула (558) принимает вид

$$d\varphi = \mathbf{b}\, D\mathbf{a}. \tag{558'}$$

Эта формула еще понадобится нам в дальнейшем; сейчас же применим ее к полю единичного вектора $\mathbf{t}$, касательного к кривой C на поверхности. Тогда

$$d\varphi = \mathbf{b}\, D\mathbf{t},$$

где $\mathbf{b} = [\mathbf{m}, \mathbf{t}]$. Отсюда

$$\frac{d\varphi}{ds} = \mathbf{b}\,\frac{D\mathbf{t}}{ds} = \left(\mathbf{mt}\,\frac{D\mathbf{t}}{ds}\right). \tag{558''}$$

Сравнивая с (557'), получим

$$\tilde{k}_{\text{вн}} = \frac{d\varphi}{ds}. \tag{559}$$

Таким образом *внутренняя кривизна кривой C на поверхности есть скорость геодезического* [1]) *вращения ее касательной* $\mathbf{t}$ *по отношению к пути s, проходимому точкой касания.*

Дадим аналитическое выражение для вектора внутренней кривизны. Прежде всего вектор $\mathbf{t}$, как единичный касательный вектор вдоль кривой C, может быть записан в виде

---

[1]) То есть угол поворота касательной оценивается по отношению к векторам, параллельно переносимым по поверхности вдоль кривой C.

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad \mathbf{r}_1 \frac{du^1}{ds} + \mathbf{r}_2 \frac{du^2}{ds}. \tag{559'}$$

Таким образом $\frac{du^1}{ds}$, $\frac{du^2}{ds}$ являются координатами вектора $\mathbf{t}$ и играют для поля $\mathbf{t}$ вдоль кривой C ту же роль, что и коэфициенты a^1, a^2 в общем случае. Применяя теперь формулы (554), мы получим для координат абсолютного диференциала $D\mathbf{t}$ следующие выражения:

$$Dt^1 = d\frac{du^1}{ds} + G^1_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds}du^\beta,$$

$$Dt^2 = d\frac{du^2}{ds} + G^2_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds}du^\beta.$$

Отсюда координаты вектора внутренней кривизны $\frac{D\mathbf{t}}{ds}$ примут вид

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{D\mathbf{t}}{ds}\right)^1 &= \frac{d^2u^1}{ds^2} + G^1_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds},\\ \left(\frac{D\mathbf{t}}{ds}\right)^2 &= \frac{d^2u^2}{ds^2} + G^2_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds},\end{aligned}\right\} \tag{560}$$

а сам вектор $\frac{D\mathbf{t}}{ds}$ выразится разложением

$$\frac{D\mathbf{t}}{ds} = \left(\frac{D\mathbf{t}}{ds}\right)^1 \mathbf{r}_1 + \left(\frac{D\mathbf{t}}{ds}\right)^2 \mathbf{r}_2. \tag{560'}$$

Вычислив $\frac{D\mathbf{t}}{ds}$, естественно перейти к вычислению $\tilde{k}_{\text{вн}}$ по формуле (557'):

$$\tilde{k}_{\text{вн}} = \left(\mathbf{m}\mathbf{t}\frac{D\mathbf{t}}{ds}\right).$$

Вставляем в это смешанное произведение выражения (559') и (560'). Получим

$$\tilde{k}_{\text{вн}} = \left(\mathbf{m}\left(\mathbf{r}_1\frac{du^1}{ds} + \mathbf{r}_2\frac{du^2}{ds}\right)\left[\mathbf{r}_1\left(\frac{D\mathbf{t}}{ds}\right)^1 + \mathbf{r}_2\left(\frac{D\mathbf{t}}{ds}\right)^2\right]\right) =$$

$$= (\mathbf{m}\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)\left\{\frac{du^1}{ds}\left(\frac{D\mathbf{t}}{ds}\right)^2 - \frac{du^2}{ds}\left(\frac{D\mathbf{t}}{ds}\right)^1\right\}.$$

Смешанное произведение $(\mathbf{m}\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)$ можно представить в виде $\mathbf{m}[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$, а так как $\mathbf{m}$ — единичный вектор, направленный по $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$, то скалярное произведение этих векторов равно модулю $|[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]|$; но этот модуль был уже вычислен в (347) и оказался равным $\sqrt{EG - F^2}$, т. е. $\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$. Что же касается фигурной скобки, то в нее мы подставляем выражения (560), развертывая сокращенно записанные суммы. Получаем

$$\tilde{k}_{\text{вн}} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\left[\ddot{u}^2\dot{u}^1 - \ddot{u}^2\dot{u}^1 + G^1_{11}(\dot{u}^1)^3 + (2G^2_{12} - G^1_{11})(\dot{u}^1)^2\dot{u}^2 + (G^2_{22} - 2G^1_{12})\dot{u}^1(\dot{u}^2)^2 - G^1_{22}(\dot{u}^2)^3\right]. \tag{561}$$

Для краткости дифференцирование по s изображается здесь точкой над буквой. Внутренняя кривизна выражается, таким образом, через первые и вторые производные текущих координат u^1, u^2 по дуге s.

Допустим, что кривая на поверхности задана уравнением

$$u^2 = f(u^1).$$

Тогда производные от u^2 по u^1 могут быть выражены через производные по s:

$$f'(u^1) = \frac{\dot{u}^2}{\dot{u}^1}, \quad f''(u^1) = \frac{d\dfrac{\dot{u}^2}{\dot{u}^1}}{du^1} = \frac{\ddot{u}^2\dot{u}^1 - \ddot{u}^1\dot{u}^2}{(\dot{u}^1)^3}.$$

Вынося $|\dot{u}^1|^3$ за скобку из выражения (561), взятого по модулю, мы получим

$$k_{\text{вн}} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\left|\frac{du^1}{ds}\right|^3 \left|f''(u^1) + G_{11}^2 + (2G_{12}^2 - G_{11}^1)f'(u^1) + \right.$$
$$\left. + (G_{22}^2 - 2G_{12}^1)[f'(u^1)]^2 - G_{22}^1[f'(u^1)]^3\right|.$$

Так как

$$ds = \sqrt{g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12}\,du^1\,du^2 + g_{22}(du^2)^2} =$$
$$= |du^1|\sqrt{g_{11} + 2g_{12}f'(u^1) + g_{22}[f'(u^1)]^2},$$

то окончательно выражение для $k_{\text{вн}}$ мы получаем в виде

$$k_{\text{вн}} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,\frac{|f'' + G_{11}^2 + (2G_{12}^2 - G_{11}^1)f' + (G_{22}^2 - 2G_{12}^1)f'^2 - G_{22}^1 f'^3|}{(g_{11} + 2g_{12}f' + g_{22}f'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (562)$$

Любопытно применить эту формулу в частном случае, когда наша поверхность есть плоскость, отнесенная к прямоугольным декартовым координатам x, y. Тогда $ds^2 = dx^2 + dy^2$, т. е. $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = 0$, и все частные производные от g_{ij} как от постоянных равны нулю, вследствие чего обращаются в нуль все величины G_{ij}^k.

Формула (562) принимает вид

$$k_{\text{вн}} = \frac{|f''|}{(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Мы возвращаемся к хорошо известной формуле для кривизны кривой на плоскости (вынужденная кривизна в этом случае всегда равна нулю).

§ 63. Геодезические линии на поверхности.

Геодезической линией на поверхности называется кривая, внутренняя кривизна которой в каждой точке равна нулю. Таким образом смысл этого определения в том, что оно выделяет класс „прямейших"

линий на поверхности. Действительно, если поверхность дана, то одна и та же вынужденная кривизна навязывается на ней, как мы знаем, всякой кривой, проходящей через данную точку по данному направлению. Напротив, внутренняя кривизна зависит от формы кривой на поверхности, и для определенного класса этих кривых можно заставить внутреннюю кривизну обратиться в нуль. Пользуясь определением внутренней кривизны

$$k_{\text{вн}} = \left|\frac{D\mathbf{t}}{ds}\right|,$$

можно определение геодезической формулировать и таким образом: *Вдоль геодезической линии абсолютный дифференциал* $D\mathbf{t}$ *единичного касательного вектора* $\mathbf{t}$ *равен во всех точках нулю.* Другими словами, взяв вектор $\mathbf{t}$ в какой-нибудь точке геодезической линии и переиося его параллельным перенесением по поверхности вдоль этой геодезической линии, мы получаем во всех ее точках опять единичный касательный вектор. Но это равносильно тому, что обыкновенный дифференциал $d\mathbf{t}$ параллелен нормали $\mathbf{m}$, так как $D\mathbf{t}$ есть касательная составляющая $d\mathbf{t}$. С другой стороны, в силу первой формулы Френе $d\mathbf{t}$ направлен всегда по главной нормали $\mathbf{n}$ к кривой, так что окончательно можно формулировать:

Для того чтобы кривая на поверхности была геодезической, необходимо и достаточно, чтобы ее главная нормаль во всех точках совпадала с нормалью к поверхности.

Заметим, что если линия на поверхности окажется прямой, то она обязательно будет геодезической, так как $\mathbf{t}$ остается тогда постоянным и $d\mathbf{t} = D\mathbf{t} = 0$.

Основываясь на формулированном признаке геодезических линий, их в некоторых случаях легко можно обнаружить. Так, очевидно, для сферы геодезическими служат окружности больших кругов, так как их главные нормали проходят через центр сферы и совпадают с нормалями к сфере.

Переходим к составлению дифференциальных уравнений геодезических и к выяснению вопроса о „количестве" этих кривых на поверхности, точнее, о степени произвола в построении геодезической.

Пусть u^1, u^2 — текущие координаты вдоль геодезической, рассматриваемые как функции длины дуги s. Обращение вдоль геодезической в нуль вектора кривизны $\frac{D\mathbf{t}}{ds}$ можно записать, приравнивая нулю каждую из его координат [см. (560)]. Получим

$$\frac{d^2u^1}{ds^2} = -G^1_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds}, \qquad \frac{d^2u^2}{ds^2} = -G^2_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds}. \tag{563}$$

Мы имеем нормальную систему двух дифференциальных уравнений 2-го порядка, где искомые функции суть u^1, u^2, а s — аргумент. Вторые производные искомых функций выражены здесь определенным образом через сами искомые функции, входящие через величины $G^k_{ij}(u^1, u^2)$,

и первые производные искомых функций. Исследование системы (563) несколько усложняется тем, что аргумент s должен здесь иметь геометрический смысл дуги, в силу чего кроме уравнений (563) функции $u^1(s)$, $u^2(s)$ должны удовлетворять добавочному соотношению

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta.$$

Поэтому мы предпочтем искать уравнения геодезических, отнесенные не к дуге как к параметру, а к одной из текущих координат, например u^1. Пусть искомое уравнение геодезической будет

$$u^2 = f(u^1).$$

Пользуясь тогда для внутренней кривизны выражением (562) и приравнивая его нулю, мы приходим к дифференциальному уравнению 2-го порядка, очевидно, необходимому и достаточному для того, чтобы $u^2 = f(u^1)$ определяло геодезическую линию:

$$f'' = -\,G^2_{11} - (2G^2_{12} - G^1_{11})f' + (-\,G^2_{22} + 2G^1_{12})f'^2 + G^1_{22}f'^3. \quad (564)$$

Вторая производная искомой функции f'' выражена как полином третьей степени относительно первой производной, причем коэфициенты полинома известным нам образом зависят от аргумента u^1 и искомой функции u^2.

По теореме существования решения, в применении к дифференциальному уравнению 2-го порядка, можно произвольно выбрать начальные значения $(u^1)_0$, $(u^2)_0$, $\left(\frac{du^2}{du^1}\right)_0$ и потребовать, чтобы при $u^1 = (u^1)_0$ искомая функция u^2 обратилась в $(u^2)_0$, а ее производная в $\left(\frac{du^2}{du^1}\right)_0$. Тогда существует одно и только одно решение уравнения (564), удовлетворяющее этим условиям [и определенное по крайней мере вблизи значения $u^1 = (u^1)_0$].

То же самое геометрически означает, что *через каждую точку* $(u^1)_0$, $(u^2)_0$ *по каждому направлению* $\left(\frac{du^2}{du^1}\right)_0$ *проходит одна и только одна геодезическая*, уравнение которой по крайней мере вблизи данной точки получается в виде $u^2 = f(u^1)$.

Заметим, что фактически геодезическую можно продолжать по поверхности или неограниченно, или вплоть до края поверхности. Между тем по указанной теореме существования мы строим ее лишь в малом, и это потому, что уравнение ее ищется в виде $u^2 = f(u^1)$, а такую запись уравнения можно обеспечить, вообще говоря, лишь в малом. Вблизи же тех точек, где $\frac{du^2}{du^1}$ обращается в бесконечность (точнее, где $\frac{du^1}{du^2}$ обращается в нуль), уравнение геодезической следует искать в виде $u^1 = f(u^2)$; все будет обстоять совершенно аналогично, лишь значки 1, 2 поменяются ролями. Геодезическая в целом составится

из пусков, в которых ее уравнение будет записываться в виде или $u^2 = f(u^1)$ или $u^1 = f(u^2)$.

Мы видим, что множество геодезических на поверхности ведет себя в известном смысле так, как множество прямых на плоскости: через каждую точку по каждому направлению можно провести геодезическую. Это и неудивительно, так как прямые на плоскости есть, очевидно, частный случай геодезических на поверхности.

Подходя к вопросу несколько иначе, можно сказать, что, так как дифференциальное уравнение (564) 2-го порядка, то *семейство геодезических зависит от двух параметров* (ранее рассмотренные семейства кривых зависели обычно от одного параметра)[1]).

§ 64. Полугеодезическая система координат на поверхности.

Допустим, что нам удалось выбрать такую специальную систему координат $u^1 = u$, $u^2 = v$ на поверхности, что координатные линии u суть геодезические и ортогональны к линиям v.

Такую координатную систему можно осуществить бесчисленным количеством способов; позже мы покажем, как подойти к этому строго, пока же ограничимся такими наглядными соображениями: в качестве координатных линий u берем *произвольное* семейство геодезических от одного параметра, т. е. выбираем ∞^1 геодезических из их общего количества ∞^2. Координатные же линии v мы строим как ортогональные траектории к линиям u.

Так как линии u суть геодезические, то вдоль них должно удовлетворяться уравнение (564). Но вдоль линии u мы имеем

$$v = u^2 = \text{const},$$

следовательно, $f(u^1) = \text{const}$, $f' = f'' = 0$. Вставляя эти значения в (564), мы получаем вдоль линии u

$$0 = -G_{11}^2.$$

Так как линия u может быть проведена через любую точку поверхности, то в нашей координатной системе мы имеем для любой точки поверхности

$$G_{11}^2 = 0. \tag{565}$$

К этому мы присоединим еще известное условие ортогональности координатной сети

$$F = g_{12} = 0. \tag{566}$$

[1]) Заметим, что геодезические линии относятся, конечно, к внутренней геометрии поверхности, другими словами, изгибание поверхности отображает геодезические линии снова в геодезические. Это видно из того, что внутренняя кривизна кривой на поверхности есть инвариант изгибания, и если до изгибания она во всех точках была равна нулю, то она останется равной нулю и после изгибания.

Легко проверить, что условия (565) и (566) не только необходимы, но и достаточны, чтобы координатные линии u были геодезическими и чтобы сеть была ортогональной. Пользуясь теперь второй из формул (530) при $i=j=1$ и учитывая, что $g_{12}=0$, получим

$$G_{2,11}=-G_{11}^2 g_{22}.$$

Отсюда мы видим, что условие (565) равносильно обращению в нуль $G_{2,11}$, так что окончательно условия (565) и (566) можно переписать в виде

$$G_{2,11}=0, \quad g_{12}=0. \tag{567}$$

Но для величин $G_{k,ij}$ у нас имеется выражение (535), которое дает при $k=2$, $i=j=1$

$$G_{2,11}=\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}. \tag{567'}$$

Так как $g_{12}=0$, то обращение $G_{2,11}$ в нуль равносильно, очевидно, обращению в нуль $\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}$, так что условия (567) перепишутся в виде

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}=0, \quad g_{12}=0. \tag{568}$$

Мы видим, что g_{11} от u^2 не зависит и может быть функцией лишь одного u^1. Рассмотрим первую квадратичную форму, возвращаясь к обозначению $u^1=u$, $u^2=v$, $g_{11}=E$, $g_{12}=F$, $g_{22}=G$. Имеем

$$ds^2=E(u)\,du^2+G(u,\,v)\,dv^2.$$

Это выражение можно еще упростить, введя в качестве первой координаты u новое переменное (у нас всегда $E>0$, $G>0$):

$$\int \sqrt{E(u)}\,du. \tag{569}$$

Так как новая координата u есть функция старой, то линии v, т. е. линии, вдоль которых u сохраняет постоянное значение, останутся прежними. То же относится и к линиям u, так как координату v мы не меняем. В результате перехода к новым криволинейным координатам u, v [где v прежнее, а новое u выражается через прежнее u посредством (569)], мы можем, очевидно, переписать первую квадратичную форму в виде

$$ds^2=du^2+G(u,\,v)\,dv^2. \tag{570}$$

Систему координат, где ds^2 имеет такой вид, т. е. где

$$E=g_{11}=1, \quad F=g_{12}=0, \tag{570'}$$

мы будем называть полугеодезической. Так как условия (568) в этом случае, очевидно, имеют место, то линии u геодезические, а линии v им ортогональны.

Кривые однопараметрического семейства, образующего ортогональную сеть совместно с каким-нибудь однопараметрическим семейством геодезических, называются *геодезическими параллелями* друг по отношению к другу. Таким образом линии v образуют семейство геодезических параллелей.

В полугеодезической системе координат легко обнаружить интересное свойство геодезических параллелей. А именно, двигаясь вдоль какой-нибудь линии u, мы имеем $dv = 0$, и (570) принимает вид $ds = du$. Отсюда следует, что вдоль линии u параметр u играет роль длины дуги, и длина отрезка линии u между точками $u = a$ и $u = b$ равна $b - a$. Возьмем теперь две какие-нибудь геодезические параллели, т. е. две линии v: $u = a$, $u = b$. Тогда заключенные между ними отрезки ортогональных к ним геодезических, т. е. линий u, имеют всеодну и ту же длину, именно $b - a$.

В полугеодезической координатной системе сильно упрощаются выражения для основных величин, связанных с поверхностью. Вычислим прежде всего величины $G_{k,ij}$. Пользуясь формулами (535) и учитывая, что сейчас у нас $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = G$, получим

$$G_{1,11} = 0, \quad G_{1,12} = 0, \quad G_{1,22} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},$$

$$G_{2,11} = 0, \quad G_{2,12} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \quad G_{2,22} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}.$$

Далее, формулы (531) дают

$$g^{11} = 1, \quad g^{12} = 0, \quad g^{22} = \frac{1}{g_{22}} = \frac{1}{G}. \tag{571}$$

Пользуясь теперь формулами (532), получим

$$\left.\begin{aligned} &G^1_{11} = 0, \quad G^1_{12} = 0, && G^1_{22} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \\ &G^2_{11} = 0, \quad G^2_{12} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}, && G^2_{22} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \tag{571'}$$

Вычислим гауссову кривизну K, пользуясь формулами (544) и (545):

$$K = \frac{-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \left(\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 G}{G}.$$

В числителе здесь стоит выражение (544), в котором уцелели только члены

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} + G^2_{12} G^2_{12} g_{22},$$

а остальные слагаемые — нули, так как $G^1_{12} = G^2_{11} = 0$. Окончательно можно написать

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}. \tag{572}$$

Запишем далее дифференциальное уравнение геодезических (564). Учитывая формулы (571′), получаем

$$f'' = -\frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u}f' - \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial v}f'^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}f'^3, \qquad (573)$$

где уравнение геодезической ищется в виде $v = f(u)$.

Укажем, наконец, аналитический подход к построению полугеодезических координат: пусть в полугеодезических координатах u, v задано скалярное поле на поверхности, $\varphi(u, v)$; тогда скалярный квадрат его градиента (первый дифференциальный параметр) $\nabla(\varphi)$, выражающийся по формуле (552′), в силу (571) примет вид

$$\nabla(\varphi) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2.$$

Аналогичным образом вычисляем $\nabla(\varphi, \psi)$ для двух скалярных полей на поверхности [см. (552)]:

$$\nabla(\varphi, \psi) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{1}{G}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}.$$

Если взять скалярные функции $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ частного вида а именно

$$\varphi(u, v) = u, \quad \psi(u, v) = v,$$

то, очевидно, мы получим

$$\nabla(u) = 1, \quad \nabla(u, v) = 0. \qquad (574)$$

Допустим, что мы находимся в произвольных координатах u^1, u^2, а полугеодезические координаты u, v ищем как функции u^1, u^2. Мы имеем тогда право переписать уравнения (574), выразив их левые части $\nabla(u)$ и $\nabla(u, v)$ по формулам (552′) и (552) уже в координатах u^1, u^2, так как значения $\nabla(u)$, $\nabla(u, v)$ не зависят от выбора системы координат на поверхности. Получаем дифференциальные уравнения в частных производных для искомых функций $u(u^1, u^2)$, $v(u^1, u^2)$

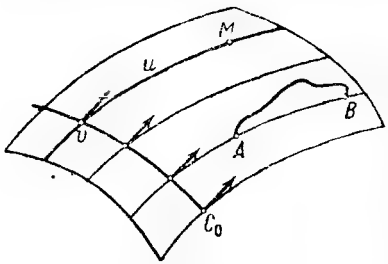
$$g^{\alpha\beta}(u^1, u^2)\frac{\partial u}{\partial u^\alpha}\frac{\partial u}{\partial u^\beta} = 1, \quad g^{\alpha\beta}(u^1, u^2)\frac{\partial u}{\partial u^\alpha}\frac{\partial v}{\partial u^\beta} = 0. \qquad (574')$$

Мы пришли к аналитическому методу отыскания полугеодезических координат u, v как решений этих уравнений. В самом деле, уравнения (574) не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы функции $u(u^1, u^2)$, $v(u^1, u^2)$ (в той области, где к ним вообще можно перейти как к координатам на поверхности) служили там полугеодезическими координатами.

Чтобы убедиться в этом, достаточно записать уравнения (574), которым удовлетворяют u, v, приняв в то же время u, v за координаты u^1, u^2. Мы получаем, как легко подсчитать, $g^{11} = 1$, $g^{12} = 0$ (так как теперь $\frac{\partial u}{\partial u^1} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial u^1} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial u^2} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial u^2} = 1$), откуда сейчас же следует, что $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$, т. е. система действительно полугеодезическая.

§ 65. Экстремальное свойство геодезических.

Покажем прежде всего способ построения полугеодезических координат на поверхности; одновременно выяснится и степень произвола в их выборе. Мы утверждаем следующее: *любая кривая C_0 на поверхности, если ограничиться достаточно малым куском поверхности около какой-нибудь обыкновенной точки, может быть включена в семейство геодезически параллельных ей кривых C, причем существует полугеодезическая система координат u, v, в которой эти кривые служат линиями v.* Таким образом в малых кусках поверхности геодезические параллели всегда можно рассматривать как линии v некоторой полугеодезической системы.



Черт. 125.

Переходя к доказательству, отнесем кривую C_0 к какому-нибудь параметру v. В каждой точке v кривой C_0 берем направление на поверхности, ортогональное к направлению C_0 (черт. 125), и проводим через точку v в этом направлении геодезическую линию. Это, как мы знаем, можно выполнить и притом единственным образом. Отложим на построенной геодезической дугу, длину которой обозначим через u (снабжая u знаком $\pm$, в зависимости от того, в какую сторону от C_0 отложена дуга). В результате мы приходим в некоторую точку M на поверхности, положение которой вполне определяется значениями u, v. Считая, что поверхность отнесена к каким-то координатам u^1, u^2, мы получим значения u^1, u^2 для точки M как функции u, v:

$$u^1 = u^1(u, v), \quad u^2 = u^2(u, v).$$

Ссылаясь на теоремы анализа, можно было бы показать, что эти функции непрерывно диференцируемы и что в любой точке v_0 кривой C_0 ($u = 0$, $v = v_0$) якобиан $\dfrac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(u, v)}$ отличен от нуля. Этого достаточно, чтобы утверждать, что в достаточно малой окрестности точки $u = 0$, $v = v_0$ наши функции допускают обращение

$$u = u(u^1, u^2), \quad v = v(u^1, u^2)$$

и, следовательно, u, v можно принять в этой окрестности за криволинейные координаты (так как налицо *взаимно однозначное* соответствие точек окрестности с парами значений u, v). Из самого построения ясно, что линии u будут геодезическими, причем вдоль них параметр u играет роль дуги, и что линия C_0 принадлежит к числу линий v (именно, при $u = 0$). Покажем, что ds^2 имеет вид (570); тем самым наше утверждение будет доказано, так как тогда C_0, совместно с остальными линиями v, образует семейство геодезических параллелей.

Рассматривая u как u^1 и v как u^2, мы приходим снова к условию (565)

$$G_{11}^2 = 0,$$

выражающему, что линии u суть геодезические. Последнее из уравнений (530) дает нам теперь (при $i = j = 1$)

$$G_{2,11} = g_{12} G_{11}^1 \tag{575}$$

(мы еще не знаем, будет ли g_{12} обращаться в нуль). Так как вдоль линии u^1 дифференциал дуги всегда выражается формулой

$$\sqrt{g_{11}}\, du^1$$

и так как в нашем случае он совпадает с du^1 ($u = u^1$ играет роль дуги вдоль линии u), то мы заключаем

$$g_{11} = 1. \tag{576}$$

Формула (567′) принимает теперь вид

$$G_{2,11} = \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}. \tag{577}$$

Сравнивая (575) и (577), мы получаем

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} = g_{12} G_{11}^1, \quad \text{или} \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \cdot \frac{1}{g_{12}} = G_{11}^1.$$

Интегрируя это уравнение по аргументу u^1 при фиксированном u^2, получим

$$g_{12}(u^1, u^2) = g_{12}(0, u^2)\, e^{\int_0^{u^1} G_{11}^1 du^1}; \tag{578}$$

здесь $g_{12}(0, u^2)$ — значение g_{12} в некоторой точке u^2 на кривой C_0 ($u^1 = u = 0$). В правильности формулы (578) легко убедиться непосредственной проверкой. Но так как геодезические линии u проводились у нас ортогонально к кривой C_0, то $g_{12}(0, u^2)$, т. е. g_{12} в точках кривой C_0, равны нулю; в силу (578) получаем

$$g_{12} = 0. \tag{579}$$

Формулы (576) и (579) показывают, что ds^2 у нас действительно имеет вид (570). Этим наше утверждение доказано, и мы умеем строить полугеодезическую систему, исходя из произвольной кривой C_0.

Поясним наглядно, почему при доказательстве нам пришлось ограничиться лишь достаточно малым куском около какой-нибудь точки v_0 на кривой C_0. Ортогональные к C_0 геодезические, проведенные нами, начнут, возможно, пересекаться, если мы их продолжим слишком далеко, и не смогут тогда служить координатными линиями искомой полугеодезической системы.

Из доказанной теоремы легко вытекает такое следствие: всякая геодезическая линия в достаточно малой окрестности данной своей точки M_0 может быть включена в полугеодезическую систему координат в качестве линии u. Действительно, для этого достаточно через точку M_0 ортогонально к геодезической провести произвольную кривую C_0, а затем, исходя из C_0, построить вблизи M_0 только что указанным методом полугеодезическую систему координат. Исходная геодезическая автоматически окажется в числе линий u этой системы.

Теперь мы можем доказать следующее экстремальное свойство геодезических. *Отрезок геодезической AB между точками A и B на ней дает кратчайшее расстояние между A и B по сравнению со всеми другими кривыми AB на поверхности, соединяющими эти точки, при условии, что точка B берется в достаточно малой окрестности точки A.*

В силу сказанного выше, мы можем считать рассматриваемую геодезическую в достаточно малой окрестности около A линией u некоторой полугеодезической системы. Пусть AB (черт. 125) — отрезок линии u и пусть значения u в точках A и B суть соответственно a и b. Тогда, как мы знаем, длина AB равна $b-a$ (считая $b>a$).

С другой стороны, соединим A и B произвольной кривой AB. Ее длина в силу (570) выражается взятым вдоль нее интегралом

$$\int_A^B \sqrt{du^2+G(u,v)\,dv^2}.$$

Этот интеграл не меньше, чем интеграл $\int_A^B |du|$, взятый вдоль той же кривой (достаточно сравнить подинтегральные выражения, помня, что $G>0$); но интеграл от модуля не меньше модуля интеграла и, следовательно,

$$\int_A^B |du| \geqslant \left|\int_A^B du\right| = b-a.$$

Знак $=$ имеет место, если du все время положительно, т. е. если u вдоль кривой $\overset{\frown}{AB}$ от значения a до b растет монотонно. Если же u при этом колеблется, то имеет место знак $>$.

Итак, во всяком случае

$$\int_A^B \sqrt{du^2+G(u,v)\,dv^2} \geqslant b-a.$$

Этим наше утверждение доказано. Заметим, что оговорка о том, что геодезическая берется в достаточно малом куске, является существенной. В самом деле, рассмотрим геодезическую на сфере, т. е. окружность большого круга. Две точки A и B на этой окружности разбивают ее на два куска; один из них больше, а другой меньше половины этой

окружности (если точки A и B не диаметрально противоположны). Если соединить A и B меньшим куском, то это будет действительно кратчайшее расстояние между A и B по сфере; если же их соединить бо́льшим куском, то этого, очевидно, не будет, хотя A и B соединены отрезком геодезической. Таким образом, для того чтобы доказанное свойство имело место для геодезических на сфере, их тоже нужно брать в кусках „достаточно малых", а именно меньших полуокружности.

Доказанное экстремальное свойство не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы кривая была геодезической. Чтобы это обнаружить, нужно заняться вариационной задачей на определение минимума интеграла

$$\int_A^B \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

взятого по какой-нибудь кривой на поверхности, соединяющей две данные точки A, B. Тогда мы приходим к диференциальному уравнению геодезической в качестве уравнения Эйлера-Лагранжа для этой вариационной задачи.

§ 66. Об изгибании поверхностей непостоянной кривизны.

В основу всей этой главы у нас было положено понятие изгибания. Уже говорилось, что, разумеется, не всякие две поверхности изгибаемы одна в другую. Между тем мы не имеем еще ответа на естественно возникающий вопрос:

Даны две поверхности, S и S^*. Как узнать, изгибаемы ли они одна в другую?

Этой задачей мы сейчас и будем заниматься. Отметим прежде всего, что при изгибании поверхности гауссова кривизна K в каждой точке остается прежней (§ 58). Поэтому, если во всех точках поверхности K имело одно и то же значение, то и после изгибания K сохраняет во всех точках то же значение. Другими словами, поверхности постоянной гауссовой кривизны при изгибании переходят только в поверхности постоянной гауссовой кривизны (с тем же ее значением). Следовательно, поверхность с непостоянной гауссовой кривизной может изгибаться только в поверхность с непостоянной гауссовой кривизной. В этом параграфе мы займемся поставленной выше задачей только для случая, когда S и S^* обладают *непостоянной гауссовой кривизной.*

Рассмотрим на поверхности S скалярное поле $K(u^1, u^2)$, образуемое гауссовой кривизной. Составим для этого поля первый диференциальный параметр (552′)

$$\nabla(K) = g^{\alpha\beta}\frac{\partial K}{\partial u^\alpha}\frac{\partial K}{\partial u^\beta}. \tag{580}$$

Получаем два скалярных поля; другими словами, K и ∇K суть функции от u^1, u^2, причем значения их в данной точке не зависят от выбора координатной системы u^1, u^2. Итак,

$$K = f_1(u^1, u^2), \quad \nabla(K) = f_2(u^1, u^2). \tag{581}$$

Будем различать теперь два возможных случая.

1. $\nabla(K)$ *функционально независимо от* K. В таком случае якобиан $\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u^1, u^2)}$ не обращается тождественно в нуль. Будем рассматривать поверхность S вблизи какой-нибудь ее точки M_0, где

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u^1, u^2)} \neq 0.$$

Как известно из анализа (см., например, Гурса, Курс математического анализа, т. I, § 33), в этом случае вблизи точки M_0 можно выразить, обратно, u^1, u^2 как функции от K, ∇K. Следовательно, K, ∇K можно принять за криволинейные координаты на поверхности по крайней мере в некоторой окрестности M_0, так как там будет иметь место взаимно однозначное соответствие между точками поверхности и значениями K, ∇K.

Допустим теперь, что поверхность S (хотя бы в некоторой окрестности точки M_0) изгибается в какую-то другую поверхность S^* в окрестности точки M_0^*. При изгибании поверхности кривизна K остается в каждой точке прежней, другими словами, вид функции $K(u^1, u^2)$ не меняется, если сохранить у каждой точки ее прежние координаты u^1, u^2. Но при этом и значения g_{11}, g_{12}, g_{22} тоже сохраняются без изменения, а следовательно, и ∇K [см. (580)] после изгибания сохранит прежнее значение.

Итак, каждая точка поверхности S переходит при изгибании в некоторую точку поверхности S^* (в частности, точка M_0 в M_0^*) *с теми же значениями* K и ∇K. Следовательно, поскольку K и ∇K могли играть роль криволинейных координат в окрестности M_0, это их свойство сохранится и после изгибания в соответствующей окрестности M_0^*. Можно сказать, что, приняв K и ∇K за криволинейные координаты, мы сохраняем в каждой точке прежние значения координат после изгибания. Но в таком случае значения g_{11}, g_{12}, g_{22} должны также оставаться без изменения.

Итак, *для изгибания окрестности точки* M_0 *на поверхности* S *в поверхность* S^* *необходимо, чтобы на поверхности* S^* *нашлась точка* M_0^* *с теми же значениями* K *и* ∇K, *что и в* M_0, *причем, если в окрестности* M_0^* *принять* K *и* ∇K *за криволинейные координаты (что должно быть возможно), то* g_{11}, g_{12}, g_{22} *в этих координатах должны быть такими же функциями координат, как и в окрестности* M_0, *когда за координаты приняты тоже* K *и* ∇K.

Теперь очевидно, что это условие не только необходимо, но и достаточно: можно осуществить изгибание, поставив в соответствие каждой точке окрестности M_0 на S точку окрестности M_0^* на S^* с теми же значениями K и ∇K (предполагается, конечно, что область изменения K и ∇K берется одинаковой для обеих окрестностей). В таком случае g_{11}, g_{12}, g_{22}, взятые в координатах K, ∇K, будут в соответствующих точках одинаковы, а следовательно, и ds^2 будет

для соответствующих бесконечно малых смещений иметь одно и то же значение.

Рассмотрим теперь второй случай, когда на поверхности

2. K *и* ∇K *функционально зависимы.*

$$\nabla(K) = F(K). \tag{582}$$

Согласно (552′) $\nabla(K)$ есть скалярный квадрат вектора градиента от K. Следовательно, $\nabla(K) \geqslant 0$, причем обращение $\nabla(K)$ в нуль означает обращение в нуль и вектора-градиента, т. е. обоих частных производных $\frac{\partial K}{\partial u^1}$, $\frac{\partial K}{\partial u^2}$. Этот случай — поверхности с постоянным значением K — оставлен пока в стороне.

Будем рассматривать поверхность S вблизи какой-нибудь ее точки M_0, где $\nabla(K) \neq 0$ и где, следовательно, $\nabla(K) > 0$.

Построим новую функцию от K

$$u(K) = \int_{K_0}^{K} \frac{dK}{\sqrt{F(K)}}. \tag{583}$$

Здесь под K_0 мы понимаем значение K в точке M_0. Очевидно, что

$$\frac{\partial u}{\partial u^i} = \frac{\partial K}{\partial u^i} \frac{1}{\sqrt{F(K)}}.$$

Теперь (582) может быть переписано в виде

$$\nabla(u) = g^{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial u^\alpha} \frac{\partial u}{\partial u^\beta} = 1. \tag{584}$$

Итак, нами построено скалярное поле u, удовлетворяющее первому из уравнений (574′). Построим теперь скалярное поле $v(u^1, u^2)$, где $v(u^1, u^2)$ — какое-нибудь из решений второго уравнения (574′). Это уравнение относительно $v(u^1, u^2)$ есть однородное линейное уравнение в частных производных первого порядка. Поэтому, если $v(u^1, u^2)$ есть решение, то и любая функция от v тоже будет решением (Степанов, Дифференциальные уравнения, гл. VIII, § 2.) При этом всегда можно $v(u^1, u^2)$ подобрать так, что в точке M_0 $\frac{\partial v}{\partial u^1}$, $\frac{\partial v}{\partial u^2}$ не обращаются оба в нуль. Следовательно, в точке M_0

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(u^2, u^2)} \neq 0,$$

так как в противном случае $\frac{\partial u}{\partial u^1}$, $\frac{\partial u}{\partial u^2}$ были бы пропорциональны $\frac{\partial v}{\partial u^1}$, $\frac{\partial v}{\partial u^2}$ и из второго уравнения (574′) следовало бы, что левая часть (584) равна нулю. Следовательно, в некоторой окрестности точки M_0 можно установить взаимно однозначное соответствие между парами значений u^1, u^2 и u, v. Принимаем теперь u, v за криволинейные координаты. Так как условия (574) выполнены, то это будет *полугеодезическая*

систему координат. При этом линии v — геодезические параллели — будут в то же время линиями уровня гауссовой кривизны. Действительно, обращая функцию (583) [что всегда можно сделать, так как $\frac{du}{dK} = \frac{1}{\sqrt{F(K)}} \neq 0$, т. е. $u(K)$ — монотонная функция], запишем

$$K = \varphi(u) \tag{585}$$

и, следовательно, вдоль линии v, т. е. при $u = \text{const}$, K тоже сохраняет постоянное значение.

В полугеодезической системе первая квадратичная форма имеет вид (570)

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\,dv^2,$$

а гауссова кривизна выражается формулой (572)

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

Но так как в рассматриваемом сейчас случае $K = \varphi(u)$, то мы получаем

$$-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = \varphi(u).$$

Другими словами, $\sqrt{G}$ должен удовлетворять линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка относительно аргумента u:

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u} + \varphi(u)\sqrt{G} = 0. \tag{586}$$

Общее решение такого уравнения имеет вид

$$\sqrt{G} = A_1(v)\psi_1(u) + A_2(v)\psi_2(u), \tag{587}$$

где ψ_1 и ψ_2, определенные линейно независимые частные решения, — функции от u, а A_1, A_2 — произвольные коэфициенты, не зависящие от аргумента u и, следовательно, могущие зависеть только от v.

Итак,

$$ds^2 = du^2 + (\psi_1(u)A_1(v)\,dv + \psi_2(u)A_2(v)\,dv)^2. \tag{588}$$

Допустим теперь, что рассматриваемая поверхность S изгибаема в некоторую другую поверхность S^*. Так как K и $\nabla(K)$ при изгибании сохраняют свои значения, то функциональная зависимость (582) *необходимо* имеет место и на S^*. Поэтому, переходя на S^* в полугеодезические координаты, построенные аналогичным образом, мы получим функциональную зависимость u от K (583) и K от u (585) совершенно такой же, как и на поверхности S, сохраняя прежнее значение постоянного K_0. Частные решения $\psi_1(u)$, $\psi_2(u)$ можно взять такие же, как и на поверхности S, так как уравнение (586) сохранит в точности прежний вид. Но вид функций $A_1(v)$ и $A_2(v)$ может оказаться теперь

иным, так что на S^* мы получаем

$$ds^2 = du^{*2} + (\psi_1(u^*) A_1^*(v^*) dv^* + \psi_2(u^*) A_2^*(v^*) dv^*)^2. \quad (589)$$

Так как при изгибании S в S^* значения K сохраняются, то в силу (583) сохраняются и значения u. Итак, в соответствующих точках обеих поверхностей

$$u^* = u. \quad (590)$$

Следовательно, линии v ($u = \text{const}$), образующие семейство геодезических параллелей на S, перейдут после изгибания в линии v^*, образующие аналогичное семейство на S^*. Линии u ($v = \text{const}$) — ортогонально секущие линии v — ввиду сохранения углов при изгибании продолжают служить ортогональными траекториями линий v^* после изгибания S в S^*. Следовательно, всякая линия u перейдет после изгибания в некоторую линию u^*, т. е. из $v = \text{const}$ следует $v^* = \text{const}$. А это значит, что при изгибании S в S^* значения v^* в преобразованных точках зависят только от значений v в исходных точках:

$$v^* = v^*(v). \quad (591)$$

Итак, в специфических координатах, которые мы ввели на обеих поверхностях, аналитическая запись изгибания необходимо имеет вид (590), (591). Необходимо, кроме того, совпадение ds^2 для соответствующих бесконечно малых смещений, т. е. необходимо тождество квадратичных форм (588) и (589) при условиях (590), (591). Очевидно, это тождество сводится к следующему:

$$\psi_1(u) A_1^* dv^* + \psi_2(u) A_2^* dv^* = \pm(\psi_1(u) A_1 dv + \psi_2(u) A_2 dv)$$

или

$$\psi_1(u)(A_1^* dv^* \mp A_1 dv) + \psi_2(u)(A_2^* dv^* \mp A_2 dv) = 0.$$

Здесь коэфициенты при $\psi_1(u)$ и $\psi_2(u)$ от u не зависят, и мы вынуждены приравнять их нулю, так как в противном случае мы имели бы линейную зависимость между ψ_1 и ψ_2. Получим

$$\left.\begin{aligned} A_1^* dv^* \mp A_1 dv = 0, \\ A_2^* dv^* \mp A_2 dv = 0, \end{aligned}\right\} \quad (592)$$

откуда

$$\frac{A_2^*(v^*)}{A_1^*(v^*)} = \frac{A_2(v)}{A_1(v)}. \quad (593)$$

(Так как A_1, A_2 одновременно не обращаются в нуль, — иначе $G = 0$, — считаем для определенности $A_1 \neq 0$). Внутренняя геометрия поверхности S в рассматриваемом втором случае может оказаться двух типов. Рассмотрим их отдельно.

Случай 2а.

A_1 и A_2 — линейно независимые функции от v. Тогда правая часть — непостоянная функция от v. В таком случае левая часть тоже должна быть непостоянной функцией от v^*, и уравнение (593) дает нам в неявной форме функциональную зависимость между v и v^*. Итак, необходимо, чтобы в рассматриваемой области изменения v существовала функция $v^*(v)$ (взаимно однозначно отображающая область изменения v на область изменения v^*), удовлетворяющая конечному соотношению (593) и диференциальным соотношениям (592) (точнее, одному из них, — другое будет следствием).

Перечислим *необходимые условия изгибаемости* поверхности S в S^*.

На S^* должна иметь место та же самая функциональная зависимость $\nabla(K)$ от K, что и на S; можно определить из (593) функциональную зависимость v^* от v так, что условия (592) удовлетворятся.

Нетрудно видеть, что перечисленное не только необходимо, но и *достаточно*. Действительно, если все это соблюдается, то преобразование S в S^*, определяемое формулами (590), (591), осуществляет изгибание S в S^*. Из предыдущих выкладок видно, что ds^2 для соответствующих бесконечно малых смещений сохраняет свое значение.

§ 67. Продолжение. Случай поверхностей, изгибаемых в поверхности вращения.

Случай 2б.

A_1, A_2 — линейно зависимые функции v:

$$A_2 = CA_1.$$

Тогда из (593) следует, что $A_2^* = CA_1^*$. В таком случае (588) можно переписать в виде

$$ds^2 = du^2 + \psi(u)^2 A_1(v)^2 dv^2, \tag{594}$$

где

$$\psi(u) = \psi_1(u) + C\psi_2(u).$$

Очевидно, $\psi(u)$ также является решением уравнения (586). Совершенно аналогично, (589) приведется к виду

$$ds^2 = du^{*2} + \psi(u^*)^2 A_1^*(v^*)^2 dv^{*2}, \tag{595}$$

где

$$\psi(u^*) = \psi_1(u^*) + C\psi_2(u^*).$$

Так как $A_2 : A_1 = A_2^* : A_1^* = C$, то нижнее из условий (592) есть следствие верхнего, так что, ограничиваясь одним верхним, получим

$$A_1^*(v^*)\,dv^* = \pm A_1(v)\,dv,$$

откуда после интегрирования получаем в неявной форме функциональную зависимость между v^* и v:

$$\int A_1^*(v^*)\,dv^* = \pm \int A_1(v)\,dv. \tag{596}$$

Перечислим теперь *необходимые условия изгибаемости* S в S^* в исследуемом случае.

На S^* должна иметь место та же самая функциональная зависимость $\nabla(K)$ от K, что и на S; отношение $A_2^* : A_1^*$ должно быть равно той же постоянной C, что и отношение $A_2 : A_1$.

Нетрудно видеть, что эти условия не только необходимы, но и *достаточны*. В самом деле, устанавливая зависимость v^* от v при помощи (596) и полагая $u^* = u$, мы осуществляем изгибание поверхности S в S^*. Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить квадратичные формы (594) и (595) для соответствующих смещений, т. е. при $u^* = u$, $du^* = du$, и при условии (596). Очевидно, оба выражения будут тождественны. Задача, поставленная нами в этом параграфе, разрешена.

В дополнение к сделанному, мы рассмотрим ближе внутреннюю геометрию поверхности S в последнем случае 2б. Этот случай характеризовался тем, что в специальной координатной системе квадратичная форма приняла вид (594). Сюда можно внести дополнительное упрощение, приняв в качестве координаты v функцию от v

$$\int A_1(v)\, dv,$$

которая будет монотонной, так как $A_1(v)$ сохраняет постоянный знак (обращение A_1 в нуль повлекло бы $G = g_{22} = 0$). При этом новом выборе координаты v (594) принимает вид

$$ds^2 = du^2 + \psi(u)^2\, dv^2. \tag{597}$$

Чтобы выяснить геометрический смысл случая 2б, докажем следующую теорему:

Для того чтобы поверхность S была изгибаема в некоторую поверхность вращения, необходимо и достаточно, чтобы ds^2 в специально подобранных координатах приводилось к виду (597).

Рассмотрим прежде всего какую-нибудь поверхность вращения, образованную вращением около оси Z некоторой кривой C, проведенной в плоскости XOZ и не пересекающей оси Z. Эту кривую C мы зададим параметрическим представлением

$$z = \varphi(u), \quad x = \psi(u) > 0,$$

где u — длина дуги вдоль C. Обозначим через v угол поворота кривой C около оси Z; тогда положение любой точки на поверхности определяется значениями u, v; v определяет положение кривой C, а u — определенную точку на ней. Линии u служат меридианами, а v — параллелями поверхности; они образуют, очевидно, ортогональную сеть, следовательно, средний коэфициент $F = g_{12}$ в квадратичной форме ds^2 обращается в нуль:

$$ds^2 = E\, du^2 + G\, dv^2.$$

Но если мы движемся вдоль линии u, т. е. по меридиану, то $dv = 0$ и

$$ds^2 = E\,du^2.$$

Но, с другой стороны, вдоль меридианов u имеет геометрический смысл длины дуги, так что $ds = du$, и мы получаем $E = 1$. Итак, ds^2 принимает вид (570)

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2. \tag{598}$$

Отсюда следует, что система координат у нас полугеодезическая, значит, параллели (линии v) суть геодезические параллели, меридианы (линии u) — геодезические линии, к ним ортогональные. То, что меридианы — геодезические линии, можно видеть и непосредственно из того, что их главные нормали (т. е. нормали к меридианам, лежащие в их плоскостях) совпадают с нормалями к поверхности.

Вычислим теперь G. При вращении кривой C около оси Z каждая точка $x = \psi(u)$, $z = \varphi(u)$ кривой C описывает параллель поверхности вращения, т. е. линию v. Так как v есть угол поворота, а $x = \psi(u)$ есть, очевидно, радиус описываемой окружности, то путь, пройденный точкой, равен $v\psi(u)$. Следовательно, вдоль линии v (т. е. при u постоянном)

$$ds = \psi(u)\,dv, \quad ds^2 = \psi(u)^2\,dv^2.$$

Формула (598) при тех же условиях дает $ds^2 = G\,dv^2$, откуда $G = \psi(u)^2$.

Итак, окончательно (598) принимает вид

$$ds^2 = du^2 + \psi(u)^2\,dv^2, \quad \psi(u) > 0. \tag{599}$$

Этим первая половина теоремы (необходимость) доказана. Действительно, пусть поверхность S изгибаема на поверхность вращения, на которой, как мы знаем, первая квадратичная форма ds^2 в координатах u, v приводится к виду (599). Припишем каждой точке поверхности S в качестве координат те же значения u, v, что и в соответствующей точке поверхности вращения. Так как для соответствующих смещений ds^2 должно иметь одинаковое значение на обеих поверхностях, ds^2 будет выражаться и на поверхности S формулой (599).

Обратно, пусть на некоторой поверхности S удалось подобрать координаты u, v, ограниченные односвязной областью изменения, так, что ds^2 принимает вид (599). Покажем, что можно построить такое семейство поверхностей вращения от одного параметра, что поверхность S изгибаема на любую из поверхностей этого семейства.

В самом деле, построим в плоскости XOZ кривую C, вдоль которой

$$x = a\psi(u^*),$$

где u^* — длина дуги вдоль кривой, а $a > 0$ — произвольно выбранное постоянное. Следовательно, $dx = a\,\psi'(u^*)\,du^*$, а так как, кроме того, $du^{*2} = ds^2 = dx^2 + dz^2$, то

$$\frac{dz}{du^*} = \sqrt{1 - \frac{dx^2}{du^{*2}}} = \sqrt{1 - a^2\psi'(u^*)^2}, \quad z = \int \sqrt{1 - a^2\psi'(u^*)^2}\,du^*.$$

Итак, кривая C получена в параметрическом представлении через длину дуги u^*. Произвольное постоянное интегрирования не играет никакой роли для формы поверхности вращения, так как означает лишь смещение кривой C параллельно оси Z. Что же касается постоянной a, то мы ее ограничим сверху:

$$a^2 < A,$$

где A равно минимальному значению $\frac{1}{\psi'(u)^2}$ в интервале изменения u на поверхности S. Этим мы обеспечиваем положительное значение подкоренного выражения, если u^* условимся рассматривать в том же интервале изменения, что и u. Рассмотрим теперь поверхность, образованную вращением кривой C около оси Z. Обозначая через v^* угол поворота, мы получаем на этой поверхности криволинейные координаты u^*, v^*. Мы знаем, что ds^2 при этом примет вид

$$ds^2 = du^{*2} + a^2 \psi(u^*)^2 dv^{*2}. \tag{600}$$

Установим теперь между данной поверхностью S с первой квадратичной формой (599) и построенной нами поверхностью вращения с первой квадратичной формой (600) взаимно однозначное соответствие таким образом:

$$u^* = u, \quad v^* = \frac{v}{a}. \tag{601}$$

Мы получим, очевидно, изгибание, так как формы (599) и (600) для соответствующих смещений будут принимать на обеих поверхностях одно и то же значение, и длина дуги вдоль соответствующих кривых будет одна и та же. Заметим, что v^* на поверхности вращения имеет смысл рассматривать в интервале изменения не более 2π, так как значения угла поворота v^*, отличающиеся на 2π, приводят нас в одну и ту же точку. Если область изменения v на поверхности S такова, что (601) дает значения v^*, меняющиеся в более широком интервале, чем 2π, то мы будем представлять себе, что поверхность S при изгибании на поверхность вращения „навита“ на нее несколько раз. Однозначность отображения будет иметь место лишь в одну сторону, именно с поверхности S на поверхность вращения; взаимную же однозначность можно обеспечить, ограничиваясь кусками поверхности S, в которых интервал изменения v меньше $2\pi a$.

Формулы (601), как легко проверить, определяют изгибание и в том случае, если вторую из них переписать в виде

$$v^* = \frac{v}{a} + b,$$

где b — произвольное постоянное. Действительно, геометрически это означает, что после изгибания S на поверхность вращения мы, увеличив все v^* на постоянное b, повернули ее около ее оси на угол b. В результате, мы получим, конечно, прежнюю поверхность вращения, на которую снова изогнута поверхность S, только точки, отвечающие

на поверхности вращения точкам S, повернулись по сравнению с прежними своими положениями на угол b около оси вращения. Отметим, что неопределенное постоянное интегрирования в формуле (596) имеет аналогичный геометрический смысл: в случае 2б после изгибания S на S^* последняя может еще „скользить" по себе самой вдоль линий v.

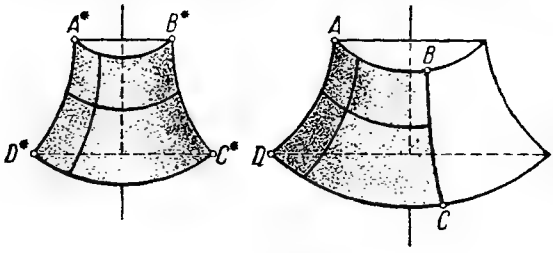
Мы получили целое *семейство поверхностей вращения, на которые изгибается S. Вид этих поверхностей зависит от произвольного параметра a.* Все они изгибаемы друг на друга. Постараемся по возможности яснее представить себе характер этого изгибания. Возьмем поверхность, отвечающую данному значению a, и вырежем из нее кусок $ABCD$, ограниченный двумя параллелями и двумя меридианами $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$, $v_1 \leqslant v \leqslant v_2$. На этой поверхности ds^2 имеет вид (600):

$$ds^2 = du^2 + a^2 \varphi(u)^2 dv^2.$$

Возьмем теперь другую из наших поверхностей, где a имеет другое значение a^*, и ds^2 можно записать в виде

$$ds^2 = du^{*2} + a^{*2} \varphi(u^*)^2 dv^{*2}.$$

Вырежем из нее кусок, ограниченный двумя параллелями и двумя меридианами $u_1 \leqslant u^* \leqslant u_2$, $v_1 \frac{a}{a^*} \leqslant v^* \leqslant v_2 \frac{a}{a^*}$. Очевидно, что формулы



Черт. 126.

$$u^* = u, \quad v^* = v \frac{a}{a^*}$$

устанавливают между этими двумя кусками взаимно однозначное соответствие, являющееся изгибанием (соответствующие ds^2 имеют одинаковые значения). Пусть $a^* < a$; тогда для кривых C и C^* в плоскости XOZ, вращением которой образованы наши поверхности, мы имеем

$$x = a\varphi(u), \quad x^* = a^*\varphi(u^*)$$

и, следовательно, в соответствующих точках (где $u^* = u$) мы имеем $|x^*| < |x|$. Таким образом, изгибая кусок первой поверхности, мы теснее окружили им ось вращения, навив его на более „узкую", вторую, поверхность вращения. Это уменьшение (в отношении $a^* : a$) расстояний от оси вращения компенсировано увеличением (в отношении $a^* : a$) интервала $v_2 - v_1$, в котором изменяется v. В результате (черт. 126) $\overset{\frown}{A^*B^*} = \overset{\frown}{AB}$, причем меньший радиус дуги $\overset{\frown}{A^*B^*}$ компенсирован бо́льшим центральным углом, в пределах которого изменяется v. При достаточном уменьшении a^* этот центральный угол становится $> 2\pi$, т. е. навивая на достаточно узкую вторую поверхность кусок $ABCD$, мы покроем ее более одного раза. Отметим еще: более

тесно окружая ось Z, вторая поверхность в то же время „выпрямляется" в вертикальном направлении; точнее, хотя $\overset{\smile}{AD} = \overset{\smile}{A^*D^*}$, но проекция A^*D^* на ось вращения больше, чем проекция AD. Это легко получить, сравнивая формулы

$$z = \int \sqrt{1 - a^2\psi'(u)^2}\, du, \quad z^* = \int \sqrt{1 - a^{*2}\psi'(u^*)^2}\, du^* \text{ при } a^* < a.$$

Если теперь взять для второй поверхности, наоборот, $a^* > a$, то поверхности, очевидно, поменяются ролями: вторая отойдет дальше от оси и укоротится „по вертикали". Следует только помнить, что, увеличивая a^*, мы можем притти к мнимым значениям z^*; поэтому при слишком больших a^* мы или совсем не получим поверхности вращения, или сумеем отобразить на полученную поверхность лишь часть $ABCD$ (именно ту, в которой $a^{*2}\psi'(u)^2$ остается < 1).

В следующем параграфе нам встретятся конкретные примеры такого рода изгибания поверхностей вращения.

Покажем еще, что *для поверхностей, изгибаемых на поверхности вращения, интегрирование дифференциального уравнения геодезических сводится к квадратурам.* Будем интегрировать дифференциальное уравнение геодезических в виде (573). Такой вид оно принимает, когда поверхность отнесена к полугеодезическим координатам u, v, и геодезическая ищется в виде $v = f(u)$. Но так как в нашем случае ds^2 имеет вид (597) (изгибаемость на поверхность вращения), то налицо добавочное упрощение, именно

$$G = \psi(u)^2,$$

т. е. G — функция одного только u. Поэтому (573) перепишется теперь в виде

$$f'' = -\frac{1}{G} G_u f' - \frac{1}{2} G_u f'^3$$

или

$$f'' = -\frac{2\psi'}{\psi} f' - \psi'\psi f'^3,$$

где $f(u)$ — искомая, а $\psi(u)$ — данная функции от u. Умножим на ψ^2:

$$\psi^2 f'' + 2\psi\psi' f' = -\psi'\psi^3 f'^3$$

или

$$(\psi^2 f')' + (\psi^2 f')^3 \frac{\psi'}{\psi^3} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{d(\psi^2 f')}{(\psi^2 f')^3} + \frac{d\psi}{\psi^3} = 0.$$

Интегрируя почленно и умножая на -2, приходим к первому интегралу нашего уравнения:

$$\frac{1}{(\psi^2 f')^2} + \frac{1}{\psi^2} = C^2, \tag{602}$$

где C^2 — неопределенная постоянная, очевидно, заведомо положительная. Отсюда

$$f' = \pm \frac{1}{\psi \sqrt{C^2\psi^2 - 1}}.$$

Следовательно, отыскание v как функции $f(u)$ сводится к квадратуре

$$v = \pm \int_0^u \frac{du}{\psi \sqrt{C^2\psi^2 - 1}} + C_1.$$

Получаем уравнение семейства геодезических, содержащее два произвольных постоянных C и C_1. Чтобы установить весьма интересный геометрический смысл постоянной C, вычислим вдоль геодезической линии косинус угла α, под которым она встречает линии v, т. е. параллели поверхности вращения. Пусть дифференциалы координат вдоль геодезической будут $du > 0$, dv, а вдоль линии v соответственно $\delta u = 0$, $\delta v > 0$.

По формуле (346) получаем, сократив δv в числителе и знаменателе:

$$\cos\alpha = \frac{F\,du + G\,dv}{\sqrt{G\,(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)}}.$$

Так как у нас

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = \psi^2,$$

то

$$\cos\alpha = \frac{\psi^2\,dv}{\sqrt{\psi^2(du^2 + \psi^2\,dv^2)}} = \frac{\psi f'}{\sqrt{1 + \psi^2 f'^2}},$$

где $f' = \frac{dv}{du}$.

Очевидно

$$\psi\cos\alpha = \frac{\psi^2 f'}{\sqrt{1 + \psi^2 f'^2}}.$$

Сравнивая с (602), мы замечаем, что $\psi\cos\alpha = \frac{1}{C}$.

Итак, *вдоль геодезической на поверхности вращения произведение расстояния от оси вращения* [т. е. $\psi(u)$] *на косинус угла между геодезической и параллелью остается постоянным.*

Поэтому, когда мы движемся по данной геодезической, ее направление тем более приближается к направлению меридиана ($\cos\alpha$ приближается к 0), чем в более „широкую“ часть поверхности вращения мы попадаем (т. е. чем больше становится расстояние ψ от оси). Напротив, приближаясь к оси, геодезическая все сильнее уклоняется по направлению от меридиана, и когда ψ принимает значение $\frac{1}{C}$, геодезическая касается параллели ($\cos\alpha = 1$) и возвращается в прежние широты. Для данной геодезической линии ψ не может стать меньше $\frac{1}{C}$, так как иначе было бы $\cos\alpha > 1$.

При изменении постоянного C_1 геодезическая, очевидно, скользит по поверхности, вращаясь около ее оси вращения.

§ 68. Об изгибании поверхностей постоянной гауссовой кривизны.

Рассмотрим поверхность S постоянной гауссовой кривизны:

$$K = \text{const}. \tag{603}$$

Возьмем на S произвольную точку M_0 и выберем в M_0 произвольное касательное к поверхности направление $\mathbf{t}_0$. Проведем по этому направлению через точку M_0 геодезическую линию и используем ее в качестве кривой C_0, определяющей вблизи точки M_0 полугеодезическую систему координат (см. начало § 65). Мы относили в общем случае кривую C_0 к произвольному параметру v; теперь мы примем в качестве v длину дуги кривой C_0, отсчитываемую от точки M_0.

Мы получим полугеодезическую систему координат u, v с той особенностью, что наперед заданная точка M_0 имеет координаты (0, 0,), координатная линия $u = 0$ будет геодезической и параметр v вдоль нее играет роль дуги (остальные линии $u = \text{const}$ будут, как и в общем случае, геодезическими параллелями к ней, но сами геодезическими быть не обязаны). Как и в общем случае,

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2. \tag{604}$$

В начале § 64 мы вывели условие (565) $G_{11}^2 = 0$, исходя из того, что линии u (т. е. u^1) служат геодезическими. Так как сейчас у нас одна из линий v (т. е. u^2) служит геодезической, мы получим совершенно аналогичным образом, что *в точках этой линии*

$$G_{22}^1 = 0.$$

Пользуясь формулами (571′), имеющими место в полугеодезической системе координат, мы можем переписать это условие в виде

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 0 \text{ при } u = 0 \text{ (т. е. вдоль линии } C_0). \tag{605}$$

Далее, так как вдоль линии C_0 роль дуги играет параметр v, $ds = dv$, а $du = 0$, то (604) показывает нам, что

$$G = 1 \quad \text{при } u = 0 \text{ (т. е. вдоль линии } C_0). \tag{606}$$

Перепишем теперь формулу (572) для гауссовой кривизны

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}$$

или

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} + K\sqrt{G} = 0, \tag{607}$$

где K — постоянное. Мы видим, что $\sqrt{G}$ по отношению к u удовлетворяет простому линейному диференциальному уравнению 2-го порядка

с постоянными коэфициентами. Решения такого уравнения хорошо известны:

$$\sqrt{G} = \begin{cases} A\cos(\sqrt{K}u) + B\sin(\sqrt{K}u), & \text{если } K > 0, \\ A + Bu, & \text{если } K = 0, \\ A\operatorname{ch}(\sqrt{-K}u) + B\operatorname{sh}(\sqrt{-K}u), & \text{если } K < 0. \end{cases} \tag{608}$$

где A и B — произвольные, не зависящие от u величины; в нашем случае они могут зависеть только от v. Положим здесь $u = 0$ и используем условие (606). Получим во всех трех случаях

$$1 = A.$$

Далее, диференцируя (608) по u:

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = \begin{cases} -A\sqrt{K}\sin(\sqrt{K}u) + B\sqrt{K}\cos(\sqrt{K}u), \\ B, \\ A\sqrt{-K}\operatorname{sh}(\sqrt{-K}u) + B\sqrt{-K}\operatorname{ch}(\sqrt{-K}u), \end{cases}$$

и используя условие (605), получим во всех трех случаях $B = 0$.

Теперь (608) принимает вид

$$\sqrt{G} = \begin{cases} \cos(\sqrt{K}u), & \text{если } K > 0, \\ 1, & \text{если } K = 0. \\ \operatorname{ch}(\sqrt{-K}u), & \text{если } K < 0 \end{cases}$$

и, следовательно,

$$ds^2 = \begin{cases} du^2 + (dv\cos(\sqrt{K}u))^2, & \text{если } K > 0, \\ du^2 + dv^2, & \text{если } K = 0, \\ du^2 + (dv\operatorname{ch}(\sqrt{-K}u))^2, & \text{если } K < 0. \end{cases} \tag{609}$$

До сих пор мы рассматривали одну поверхность S постоянной гауссовой кривизны K в полугеодезических координатах u, v. При этом точка (0, 0) и направление координатной линии $u = 0$ в этой точке совпадали с наперед заданными точкой M_0 и направлением $\mathbf{t}_0$ в ней.

Возьмем теперь другую поверхность S^* *той же* постоянной кривизны K и на ней произвольно точку M_0^* с направлением $\mathbf{t}_0^*$ в ней. Повторяем предыдущее построение и получаем вблизи M_0^* полугеодезическую систему координат u^*, v^*, причем

$$ds^2 = \begin{cases} du^{*2} + (dv^*\cos(\sqrt{K}u^*))^2, \\ du^{*2} + dv^{*2}, \\ du^{*2} + (dv^*\operatorname{ch}(\sqrt{-K}u^*))^2. \end{cases} \tag{610}$$

Установим между S и S^* взаимно однозначное соответствие (по крайней мере в окрестностях точек M_0 и M_0^*, где имеют место построенные полугеодезические системы координат)

$$u^* = u, \quad v^* = v. \tag{611}$$

Сравнивая (609) и (610), мы видим, что соответствующие дифференциалы дуг на обеих поверхностях равны между собой и, следовательно, налицо изгибание S в S^*. При этом из (611) видно, что точке (0, 0) и линии $u = 0$ отвечает точка (0, 0) и линия $u^* = 0$. Следовательно, точка M_0 с направлением t_0 переходит в точку M_0^* с направлением t_0^*.

Итак, *две поверхности S и S^* одной и той же постоянной гауссовой кривизны K всегда можно изогнуть одна в другую так, что наперед заданная на S точка M_0 с направлением t_0 в ней переходит на S^* в любую наперед заданную точку M_0^* с направлением t_0^* в ней* (подразумевается, что речь идет об изгибании поверхности S не обязательно в целом, а хотя бы в некоторой окрестности точки M_0 на некоторую окрестность точки M_0^*). Следовательно, все поверхности *данной* постоянной кривизны K имеют в малом одну и ту же внутреннюю геометрию.

Фиксировав M_0, t_0 на S, можно произвольно выбирать M_0^*, t_0^* на S^* и изгибать, таким образом, один и тот же кусок поверхности S на всевозможные места поверхности S^* с теми же тремя степенями свободы, как и при наложении куска одной плоскости на другую плоскость (два произвольных параметра — координаты точки M^* и один произвольный параметр характеризует выбор направления t_0^*).

Можно не брать двух различных поверхностей, а ограничиться одной поверхностью S постоянной кривизны K. Тогда те же рассуждения позволяют нам изгибать окрестность любой точки M_1 на ней в окрестность любой другой точки M_2 так, чтобы M_1 попадало в M_2 и чтобы наперед заданное направление в M_1 перешло в любое направление в M_2. В частности, оставляя точку M_1 на месте, можно „повернуть“ около нее ее окрестность, т. е. так отобразить окрестность на себя, чтобы все длины остались без изменения. Все направления, выходящие из M_1, повернутся при этом на один и тот же угол.

Так как при изгибании длины и углы остаются без изменения, то мы видим, что во внутренней геометрии поверхностей постоянной кривизны возможно „передвигать“ фигуры с теми же тремя степенями свободы, как и на обыкновенной плоскости. Точнее, имея в окрестности данной точки какую-нибудь фигуру, мы можем (путем изгибания окрестности в другую окрестность) отобразить эту фигуру с тремя степенями свободы в любое другое место поверхности *с сохранением всех длин и углов*. А в этом и состоит сущность понятия движения.

Итак, особенностью поверхностей постоянной кривизны является полная однородность их внутренней геометрии, столь же полная, как

и для обыкновенной плоскости (самоналожение с тремя степенями свободы). Естественно ожидать, что эта внутренняя геометрия обладает интересными свойствами. И действительно, в случае $K>0$ мы получаем внутреннюю геометрию сферы, или, что в малых кусках одно и то же, геометрию *эллиптической плоскости* [геометрия Римана [1])]. В случае $K<0$ мы получаем геометрию *гиперболической плоскости* (геометрия Лобачевского), которая была первоначально построена синтетическим путем в результате отказа от постулата параллельности и допущения, что через данную точку можно провести бесчисленное множество прямых, не пересекающих данную прямую. (Нужно иметь в виду, что на поверхности, где $K=\text{const}<0$, мы можем осуществить геометрию гиперболической плоскости не в целом, а лишь в ограниченных ее кусках.) Мы лишь бегло упоминаем здесь об этой очень интересной и важной связи с синтетической геометрией, не имея возможности остановиться на ней подробнее.

§ 69. Некоторые виды поверхностей постоянной кривизны.

Разберем теперь по отдельности три случая поверхностей постоянной кривизны. Начнем с наиболее простого, когда

$$K=0.$$

Мы уже знаем (§ 51), что это — необходимый и достаточный признак *развертывающейся* поверхности. Теперь, применяя только что доказанную теорему, мы можем утверждать, что все развертывающиеся поверхности изгибаемы в достаточно малых кусках друг на друга и, в частности, на плоскость. Обратно, всякая поверхность, изгибаемая на плоскость, обладает, как и плоскость, гауссовой кривизной, равной нулю (в силу инвариантности гауссовой кривизны при изгибании), и будет, следовательно, развертывающейся поверхностью.

Итак, *для того чтобы поверхность была развертывающейся, необходимо и достаточно, чтобы она в окрестности каждой своей (обыкновенной) точки была изгибаема на плоскость.* Здесь и получает свое объяснение термин „развертывающаяся“. Внутренняя геометрия развертывающейся поверхности будет в малом, следовательно, та же, что и на плоскости. Так как при изгибании геодезические отображаются на геодезические, то геодезические развертывающейся поверхности при изгибании ее на плоскость переходят в прямые линии.

Теперь рассмотрим случай, когда $K\neq 0$. Мы ограничимся здесь построением лишь тех поверхностей постоянной гауссовой кривизны, которые являются в то же время поверхностями вращения.

Будем искать в плоскости XOZ кривые C, вращением которых около оси Z образуется поверхность данной постоянной кривизны K. Пусть уравнение кривой C (не пересекающей оси Z) будет

$$x=\psi(u)>0, \quad z=\varphi(u),$$

[1]) Не смешивать с гораздо более общим понятием — римановой геометрии.

где u — длина дуги вдоль C. Тогда согласно (599) мы получаем для поверхности вращения

$$ds^2 = du^2 + \psi(u)^2\, dv^2,$$

где вторая координата v — угол поворота кривой C около оси Z. Найдем гауссову кривизну K нашей поверхности вращения по формуле (572):

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

Так как в нашем случае $\sqrt{G} = \psi(u)$, то

$$K = -\frac{1}{\psi(u)}\,\psi''(u).$$

Потребуем теперь, чтобы K имело наперед заданное постоянное значение; тогда для $\psi(u)$ получаем обыкновенное диференциальное уравнение

$$\psi''(u) + K\psi(u) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\left.\begin{aligned} &\psi(u) = a\cos\sqrt{K}u + b\sin\sqrt{K}u, && \text{если } K > 0,\\ &\psi(u) = ae^{\sqrt{-K}u} + be^{-\sqrt{-K}u}, && \text{если } K < 0. \end{aligned}\right\} \qquad (612)$$

К этому нужно добавить, что, так как

$$du^2 = dx^2 + dz^2,$$

то

$$dz = \sqrt{du^2 - dx^2} = \sqrt{1 - \psi'(u)^2}\, du,$$

$$z = \varphi(u) = \int_0^u \sqrt{1 - \psi'(u)^2}\, du. \qquad (612')$$

Здесь мы берем радикал со знаком $+$, предполагая, что дуга u отсчитывается в сторону возрастания z. Кроме того, мы предполагаем здесь, что $z = 0$ при $u = 0$, т. е. что кривая C передвинута параллельно оси Z так, что точка $u = 0$ попала на ось X. Все это, не сужая геометрического решения задачи, позволяет более просто записать формулы.

Рассмотрим сначала случай $K > 0$. Меняя точку отсчета дуги u вдоль кривой C, т. е. заменяя u через $u + u_0$, можно подобрать u_0 так, что $\psi(u)$ примет упрощенный вид

$$x = \psi(u) = a\cos\sqrt{K}u, \qquad (613)$$

где a — постоянное > 0, имеющее теперь, разумеется, другое значение. В самом деле, подставляя в первую из формул (612) $u + u_0$ вместо u, получаем в правой части

$$(a\cos\sqrt{K}u_0 + b\sin\sqrt{K}u_0)\cos\sqrt{K}u + (b\cos\sqrt{K}u_0 - a\sin\sqrt{K}u_0)\sin\sqrt{K}u,$$

и достаточно взять

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

Формула (612′) принимает вид

$$z = \int_0^u \sqrt{1 - a^2 K \sin^2 \sqrt{K}\, u}\, du. \tag{614}$$

Меняя u от значения нуль, мы должны ограничиться интервалом его изменения не более чем от $-\frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ до $+\frac{\pi}{2\sqrt{K}}$, так как при этих значениях x обращается в нуль и мы попадаем на ось Z. Здесь мы должны закончить кривую C, так как не хотим пересекать ось вращения.

Если $a \leqslant \frac{1}{\sqrt{K}}$, то для каждого значения u в этих пределах мы получаем значение z согласно (614), причем подкоренное выражение остается положительным. Чем меньше брать a, тем меньше будет x и тем больше будет z при тех же значениях u, как легко видеть из (613) и (614). Геометрически это значит, что дуга C, упираясь концами в ось вращения, все более приближается к ней, вытягиваясь в то же время вдоль нее (и сохраняя неизменную длину $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$, равную интервалу изменения дуги u). В частности, при $a = \frac{1}{\sqrt{K}}$ интеграл (614) легко берется, и мы получаем

$$z = -\frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K}\, u, \quad x = \frac{1}{\sqrt{K}} \cos \sqrt{K}\, u,$$

т. е. C становится полуокружностью радиуса $\frac{1}{\sqrt{K}}$, упирающейся концами в ось вращения (черт. 127). При уменьшении же параметра a дуга C вытягивается вдоль оси Z, сохраняя прежнюю длину $\frac{\pi}{\sqrt{K}}$. В точке B', где $u = -\frac{\pi}{2\sqrt{K}}$, как легко подсчитать,

$$dx = +a\sqrt{K}\, du,$$

$$dz = \sqrt{1 - a^2 K},$$

так что

$$\frac{dz}{dx} = +\sqrt{\frac{1}{a^2 K} - 1}.$$

Таков ctg угла, под которым кривая C в точке B' (и, в силу симметрии, в A') встречает ось вращения.

При вращении случай $a=\frac{1}{\sqrt{K}}$ дает сферу радиуса $\frac{1}{\sqrt{K}}$, а случай $a<\frac{1}{\sqrt{K}}$ — веретенообразную фигуру, более вытянутую вдоль оси Z и более узкую, чем сфера (с коническими особыми точками в A' и B'). Нетрудно показать, что полученная фигура после разреза по меридиану может быть изогнута в кусок сферы радиуса $\frac{1}{\sqrt{K}}$, заключенный между двумя ее меридианами.

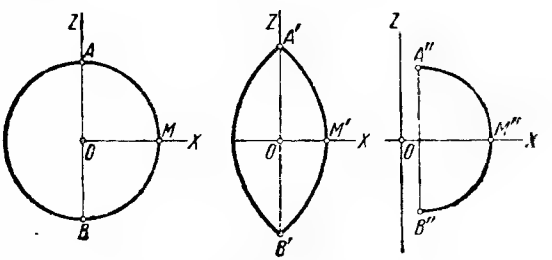
Теперь рассмотрим случай $a>\frac{1}{\sqrt{K}}$. В этом случае приходится сузить интервал изменения u, чтобы под интегралом в (614) не получалось мнимости. А именно нужно потребовать, чтобы было

$$a^2K\sin^2\sqrt{K}u\leqslant 1,\quad \text{или}\quad -\frac{1}{a\sqrt{K}}\leqslant\sin\sqrt{K}u\leqslant+\frac{1}{a\sqrt{K}}.$$

Итак, теперь u может меняться от нуля лишь в этом суженном интервале. При крайних значениях u, когда $\sin\sqrt{K}u=\pm\frac{1}{a\sqrt{K}}$, мы получаем из (613), очевидно, наименьшие возможные значения x

$$x_{A''}=x_{B''}=a\sqrt{1-\sin^2\sqrt{K}u}=\sqrt{a^2-\frac{1}{K}}.$$

Это значение положительно, т. е. теперь дуга C кончается, не доходя до оси вращения на это расстояние (черт. 127). Наибольшее значение x достигается при $u=0$ и во всех трех случаях равно a. В конечных точках A'', B'', как легко видеть из (614), $dz=0$; следовательно, касательные к дуге C перпендикулярны оси Z.



Черт. 127.

Вращением дуги C получается некоторый „пояс“, окружающий ось Z. Нетрудно показать, что, разрезав этот „пояс“ по меридиану, его можно изогнуть на поверхность сферы радиуса $\frac{1}{\sqrt{K}}$, причем он опояшет сферу по кольцу (идущему вокруг сферы по обе стороны экватора симметрично) один раз, начнет навертываться на нее по тому же кольцу вторично и т. д., пока не исчерпается его длина, которая по экватору равна $2\pi a$ и больше, следовательно, экватора сферы, равного по длине $\frac{2\pi}{\sqrt{K}}$.

Теперь рассмотрим случай $K<0$. Здесь во второй формуле (612) придется различать три возможности.

1) a и b одинаковых знаков. Тогда, меняя точку отсчета u, т. е. заменяя u через $u+u_0$, мы замечаем, что коэфициент a умножится на $e^{\sqrt{-K}u_0}$, а b разделится на это же положительное число. Очевидно, u_0 можно подобрать так, что a и b сравняются (достаточно взять $e^{2\sqrt{-K}u_0}=\frac{b}{a}$). Мы получим

$$x=\psi(u)=\frac{a}{2}(e^{+\sqrt{-K}u}+e^{-\sqrt{-K}u})=a\operatorname{ch}\sqrt{-K}u, \qquad (615)$$

где a — постоянное >0, имеющее новое значение. Согласно (612′)

$$z=\varphi(u)=\int_0^u \sqrt{1+a^2K\operatorname{sh}^2\sqrt{-K}u}\,du. \qquad (616)$$

Чтобы избежать мнимости, приходится ограничить интервал изменения u:

$$1+a^2K\operatorname{sh}^2\sqrt{-K}u\geqslant 0,$$

или

$$-\frac{1}{a\sqrt{-K}}\leqslant \operatorname{sh}\sqrt{-K}u\leqslant+\frac{1}{a\sqrt{-K}}.$$

Очевидно, что при крайних значениях $\operatorname{sh}\sqrt{-K}u=\pm\frac{1}{a\sqrt{-K}}$ будут достигаться согласно (615) наибольшие значения x, наименьшее же будет равно a и достигается при $u=0$ (черт. 128, *а*). Дуга C обращена выпуклостью к оси вращения; в конечных точках A, B, как легко проверить, $dz=0$ и, следовательно, касательные перпендикулярны к оси вращения. При увеличении a дуга C удаляется от оси Z, а интервал изменения, т. е. длина дуги C, уменьшается. Наоборот, при уменьшении a длина дуги C неограниченно увеличивается, причем C все теснее сближается с осью Z.

2) a и b разных знаков. Аналогичным приемом можно добиться (если взять $e^{2\sqrt{-K}u_0}=-\frac{b}{a}$) того, что a и b будут отличаться лишь знаком.

Получим

$$x=\psi(u)=\frac{a}{2}(e^{+\sqrt{-K}u}-e^{-\sqrt{-K}u})=a\operatorname{sh}\sqrt{-K}u. \qquad (617)$$

Возьмем для определенности $a>0$; тогда u можно менять от нуля лишь в положительную сторону (чтобы x был >0). Так как (612′) дает

$$z=\varphi(u)=\int_0^u \sqrt{1+a^2K\operatorname{ch}^2\sqrt{-K}u}\,du, \qquad (618)$$

то, чтобы избежать мнимости, интервал изменения u следует ограничить условием

$$1+a^2K\operatorname{ch}^2\sqrt{-K}u\geqslant 0,$$

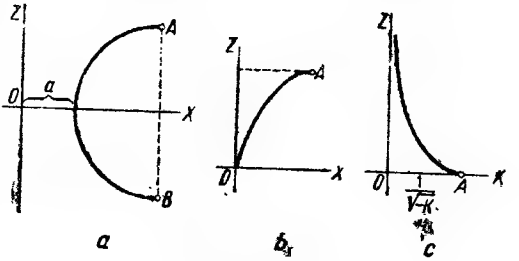
или

$$\operatorname{ch}\sqrt{-K}u \leqslant \frac{1}{a\sqrt{-K}}.$$

причем $u \geqslant 0$.

Так как ch вещественного аргумента всегда > 1, то здесь a нельзя брать каким угодно; допустимы лишь значения $a < \frac{1}{\sqrt{-K}}$.

Когда u меняется от 0 до крайнего значения ($\operatorname{ch}\sqrt{-K}u = \frac{1}{a\sqrt{-K}}$), то x растет от 0 до $a\sqrt{\frac{1}{Ka^2} - 1} = \sqrt{-\frac{1}{K} - a^2}$, причем дуга C наклонена к оси X в точке 0 под определенным углом, который все время уменьшается и в крайней точке A доходит до нуля (черт. 128, b).



Черт. 128.

3) Наиболее, интересен случай, пограничный между этими двумя — когда один из коэфициентов равен нулю. Геометрически $a = 0$ или $b = 0$ дает одно и то же, так что ограничимся случаем $a = 0$.

Тогда

$$x = \psi(u) = be^{-\sqrt{-K}u},$$

где $\psi(u) > 0$, следовательно, $b > 0$. Меняя точку отсчета дуги u, т. е. заменяя u через $u + u_0$, мы добиваемся обращения b в $\frac{1}{\sqrt{-K}}$ (нужно взять u_0 так, чтобы $be^{-\sqrt{-K}u_0} = \frac{1}{\sqrt{-K}}$).

Теперь

$$x = \psi(u) = \frac{1}{\sqrt{-K}} e^{-\sqrt{-K}u},$$

$$z = \varphi(u) = \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2\sqrt{-K}u}}\,du. \qquad (619)$$

Мы видим, что подкоренное выражение положительно при любых $u \geqslant 0$, так что u меняется от 0 до ∞. При этом x уменьшается от значения $\frac{1}{\sqrt{-K}}$, стремясь к нулю при $u \to \infty$; z монотонно растет. Кривая начинается в точке A (где касательная к ней совпадает с осью X, так как $dz = 0$ при $u = 0$) и асимптотически приближается к оси Z в положительном направлении (черт. 128, c). Кривая эта называется *трактрисой* и обладает многими интересными свойствами.

Так, отрезки ее касательных от точки касания до оси Z имеют одну и ту же длину $\frac{1}{\sqrt{-K}}$; она служит эвольвентой цепной линии $x=\frac{1}{\sqrt{-K}}\operatorname{ch} z\sqrt{-K}$ (именно той из эвольвент, которая встречается с цепной линией в ее вершине).

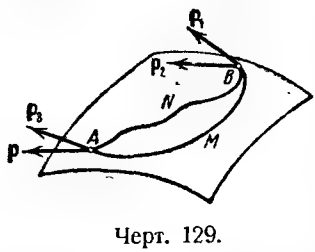
Интеграл, через который выражается z, в этом случае может быть вычислен в элементарных функциях. А именно

$$z=\frac{1}{\sqrt{-K}}\left\{\ln\left(e^{\sqrt{-K}u}+\sqrt{e^{2\sqrt{-K}u}-1}\right)-\sqrt{1-e^{-2\sqrt{-K}u}}\right\}.$$

При вращении трактрисы около ее асимптоты (оси Z) получается поверхность постоянной отрицательной кривизны K, уравнение которой, как мы видим, можно представить в элементарных функциях. Поверхность эта называется *псевдосферой*.

§ 70. Теорема Гаусса-Бонне.

Вводя параллельное перенесение векторов на поверхности, мы упоминали о той его особенности, что, вообще говоря, перенесение одного и того же вектора **a** из данной точки A в данную точку B будет давать различные результаты в зависимости от выбора пути перенесения. Мы должны теперь отдать себе ясный отчет, каким образом изменение пути AB при сохранении конечных точек A, B влияет на результат параллельного перенесения из A в B. Так как длина вектора **p** при параллельном перенесении не меняется, то разница в результате может сказаться только на направлении перенесенного вектора.



Черт. 129.

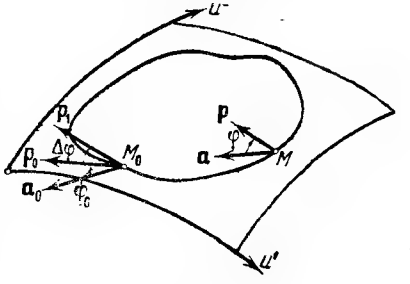
Пусть вектор **p**, перенесенный из A в B по пути AMB, занял положение $\mathbf{p}_1$, а перенесенный по другому пути ANB — занял положение $\mathbf{p}_2$ (черт. 129). Спрашивается, на какой угол вектор $\mathbf{p}_2$ повернут по сравнению с $\mathbf{p}_1$. Этой задачей мы и займемся в настоящем параграфе. Сведем ее к эквивалентной задаче, технически более удобно формулируемой. А именно, совершим параллельное перенесение векторов $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_1$ по пути BNA в точку A. Тогда $\mathbf{p}_2$ вернется в исходное положение **p**, а $\mathbf{p}_1$ придет в точку A в виде некоторого вектора $\mathbf{p}_3$. Угол между **p** и $\mathbf{p}_3$ будет как раз равен искомому углу между $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$, так как при параллельном перенесении углы не меняются (§ 61). Но вектор $\mathbf{p}_3$ можно рассматривать как вектор **p**, обнесенный по замкнутому контуру $AMBNA$ и вернувшийся в точку A с новым направлением (черт. 129). Поэтому поставленная нами задача сводится к такой:

На поверхности дан замкнутый контур. Возьмем в какой-нибудь его точке M_0 вектор **p** *и совершим параллельно перенесение этого вектора вдоль контура. Мы вернемся в точку M_0 с вектором* **p**,

повернутым на некоторый угол $\Delta\varphi$ по сравнению с его исходным положением. Требуется найти угол $\Delta\varphi$.

Как везде, где говорится о параллельном перенесении векторов на поверхности, мы имеем в виду вектор $\mathbf{p}$, касательный к поверхности.

За положительное направление отсчета углов на поверхности мы принимаем направление вращения от $\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}$ к $\mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}$ и *обходить контур будем в положительном направлении*. Единичная нормаль $\mathbf{m}$ выбирается в сторону векторного произведения $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$. Контур мы рассмотрим простой, ограничивающий односвязную область на поверхности. Контур этот, разумеется, непрерывный, но на нем допускается конечное число угловых точек; другими словами, он составлен из конечного числа дуг, каждая с непрерывно вращающейся касательной и вообще диференцируемая любое число раз; но в точках примыкания соседних дуг их касательные могут встречаться под углом.



Черт. 130.

Построим на поверхности поле единичного вектора $\mathbf{a}$, т. е. в каждой точке u^1, u^2 на поверхности зададим касательный к поверхности вектор $\mathbf{a}(u^1, u^2)$ длиной единица.

Пусть $\mathbf{a}_0$ будет значение этого вектора в некоторой точке M_0 нашего контура. В этой же точке возьмем какой-нибудь касательный к поверхности вектор $\mathbf{p}_0$, для простоты тоже единичный, который мы затем будем параллельно обносить в положительном направлении по контуру. Пусть φ_0 будет угол $\widehat{\mathbf{a}_0\mathbf{p}_0}$ (учитывая и знак). В каждой точке контура M мы можем составить угол φ, равный углу $\widehat{\mathbf{ap}}$, образованному вектором $\mathbf{a}$ в этой точке с вектором $\mathbf{p}_0$, параллельно перенесенным в эту точку и занявшим там положение $\mathbf{p}$ (черт. 130). После того как мы обойдем контур и вернемся в M_0, вектор $\mathbf{p}$ займет положение $\mathbf{p}_1$, и угол φ примет некоторое значение φ_1, равное $\widehat{\mathbf{a}_0\mathbf{p}_1}$. Очевидно

$$\widehat{\mathbf{a}_0\mathbf{p}_1} = \widehat{\mathbf{a}_0\mathbf{p}_0} + \widehat{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}$$

или

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi,$$

где $\Delta\varphi$ — угол, образованный обнесенным вектором $\mathbf{p}_1$ с его исходным положением $\mathbf{p}_0$. Итак, $\Delta\varphi$ равно $\varphi_1 - \varphi_0$ и совпадает с приращением угла φ за время обхода контура. На этом основании можно записать

$$\Delta\varphi = \oint d\varphi, \tag{620}$$

где интеграл взят по контуру, начиная от точки M_0 и кончая этой же точкой (под таким интегралом мы понимаем, конечно, сумму инте-

гралов по дугам, составляющим контур). Под знаком интеграла стоит $d\varphi$, т. е. диференциал угла φ, образованного параллельно переносимым вектором $\mathbf{p}$ с вектором поля $\mathbf{a}$.

Так как

$$\varphi = \widehat{\mathbf{ap}},$$

то

$$-\varphi = \widehat{\mathbf{pa}},$$

т. е. $-\varphi$ есть угол, образованный вектором поля $\mathbf{a}$ с параллельно переносимым вектором $\mathbf{p}$. Но для диференциала такого угла у нас имеется формула (558′)

$$d(-\varphi) = \mathbf{b}\,D\mathbf{a}, \tag{621}$$

где $\mathbf{b}$ есть повернутый в касательной плоскости на $+90°$ вектор $\mathbf{a}$. Так как в каждой точке поверхности u^1, u^2 заданы вектор $\mathbf{a}$ и единичный нормальный вектор $\mathbf{m}$, то можно построить и поле единичного вектора $\mathbf{b} = [\mathbf{m}, \mathbf{a}]$. Очевидно также, что $\mathbf{a} = -[\mathbf{m}, \mathbf{b}]$, $\mathbf{m} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. В формуле (621) можно заменить $D\mathbf{a}$ через $d\mathbf{a}$, так как разность этих векторов параллельна нормали и в скалярном произведении с касательным вектором $\mathbf{b}$ даст нуль. Итак,

$$-d\varphi = \mathbf{b}\,d\mathbf{a}. \tag{621′}$$

Перепишем теперь (620), пользуясь формулой (621′):

$$\Delta\varphi = -\oint \mathbf{b}\,d\mathbf{a}.$$

Так как $d\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 du^1 + \mathbf{a}_2 du^2$, где $\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u^1}$, $\mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u^2}$, то

$$\Delta\varphi = -\oint (\mathbf{a}_1\mathbf{b}\,du^1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}\,du^2). \tag{622}$$

Воспользуемся здесь известной формулой Грина (Гурса, т. I, § 116) для преобразования криволинейного интеграла по замкнутому контуру:

$$\oint (P\,dx + Q\,dy) = \int\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Двойной интеграл справа берется по области, ограниченной контуром. В левой части предполагается, что контур обходится в положительном направлении, т. е. в направлении вращения положительного направления оси X к положительному направлению оси Y. Но в интеграле (622) мы имеем именно такое направление обхода, если считать, что u^1 соответствует x, а u^2 соответствует y [1]). Формулу (622) можно

[1]) Наши рассуждения в части, касающейся направления обхода контура, основаны на наглядных представлениях; можно было бы сделать их вполне строгими путем формального определения положительного направления обхода как такого, когда $\oint u^1\,du^2 > 0$.

переписать теперь в виде

$$\Delta\varphi = -\int\int \left\{\frac{\partial(\mathbf{a}_2\mathbf{b})}{\partial u^1} - \frac{\partial(\mathbf{a}_1\mathbf{b})}{\partial u^2}\right\} du^1 du^2 =$$

$$= -\int\int (\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2)\, du^1 du^2, \qquad (623)$$

где двойной интеграл взят по области, вырезаемой на поверхности нашим контуром (в фигурной скобке мы выполнили дифференцирование скалярных произведений, причем члены $\pm \mathbf{a}_{12}\mathbf{b}$ взаимно уничтожились).

Займемся вычислением подинтегральной функции. Разложим $\mathbf{a}_2$ по единичным взаимно ортогональным векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{m}$. Так как проекции вектора $\mathbf{a}_2$ на $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{m}$ будут равны скалярным произведениям $\mathbf{a}_2\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_2\mathbf{b}$, $\mathbf{a}_2\mathbf{m}$, то

$$\mathbf{a}_2 = (\mathbf{a}_2\mathbf{b})\,\mathbf{b} + (\mathbf{a}_2\mathbf{m})\,\mathbf{m} \qquad (\text{так как } \mathbf{a}_2\mathbf{a} = 0).$$

Аналогично

$$\mathbf{b}_1 = (\mathbf{b}_1\mathbf{a})\,\mathbf{a} + (\mathbf{b}_1\mathbf{m})\,\mathbf{m}.$$

Отсюда

$$\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 = (\mathbf{a}_2\mathbf{m})\,(\mathbf{b}_1\mathbf{m}).$$

Так как дифференцирование равенства $\mathbf{am} = 0$ дает $\mathbf{a}_2\mathbf{m} = -\mathbf{am}_2$, и аналогично $\mathbf{b}_1\mathbf{m} = -\mathbf{bm}_1$, то мы получим

$$\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 = (\mathbf{m}_2\mathbf{a})\,(\mathbf{m}_1\mathbf{b}).$$

Поменяв ролями значки 1, 2, имеем

$$\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 = (\mathbf{m}_1\mathbf{a})\,(\mathbf{m}_2\mathbf{b})$$

и, следовательно,

$$\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{m}_1\mathbf{a} & \mathbf{m}_1\mathbf{b} \\ \mathbf{m}_2\mathbf{a} & \mathbf{m}_2\mathbf{b} \end{vmatrix} = [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2]\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]. \qquad (624)$$

Здесь мы воспользовались известной формулой векторной алгебры

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\,[\mathbf{p}, \mathbf{q}] = \begin{vmatrix} \mathbf{ap} & \mathbf{aq} \\ \mathbf{bp} & \mathbf{bq} \end{vmatrix}, \qquad (625)$$

верной для любых четырех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$.

Сошлемся теперь на формулу (455)

$$[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2] = K\,[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2].$$

Так как у нас единичная нормаль $\mathbf{m}$ направлена в сторону $[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$, то

$$[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2] = \mathbf{m}\,|[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]|$$

и, следовательно,

$$[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2] = K\,|[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]|\,\mathbf{m}.$$

Так как, кроме того, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{m}$, то (624) принимает вид

$$\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 = K\,|[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]|. \qquad (626)$$

Но в силу формулы (347)

$$|[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]| = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Пользуясь (626), можно переписать теперь выражение (623) в виде

$$\Delta\varphi = \int\int K\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du^1 du^2. \tag{627}$$

Можно придать этому результату более отчетливый геометрический смысл, если вспомнить, что согласно (350) элемент площади $d\sigma$ имеет вид

$$d\sigma = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du^1 du^2,$$

т. е. после интегрирования этого выражения по области изменения u^1, u^2 получается площадь соответствующей области на поверхности. Тогда (627) можно переписать в окончательном виде

$$\Delta\varphi = \int\int K\, d\sigma. \tag{628}$$

Таким образом *угол поворота вектора на поверхности, параллельно обнесенного по замкнутому контуру, равен интегралу от произведения элемента площади на гауссову кривизну, распространенному по области, охваченной контуром.*

Если $K = 0$, т. е. поверхность развертывающаяся, то и $\Delta\varphi$ равен нулю. И действительно, мы знаем, что развертывающаяся поверхность изгибаема на плоскость и имеет одинаковую с ней внутреннюю геометрию; в частности, значит, после параллельного перенесения вектора по любому контуру он возвращается в исходную точку с прежним направлением.

Если $K > 0$, то $\Delta\varphi > 0$ — обнесенный вектор повернулся в положительном направлении, т. е. в том самом, *в каком мы обходили контур*; если же $K < 0$, то *в обратном.*

В случае поверхности постоянной кривизны, K можно вынести из-под знака интеграла, и мы получаем

$$\Delta\varphi = K\sigma, \tag{629}$$

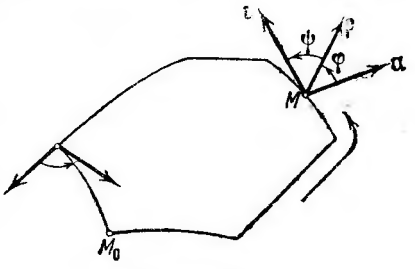
где σ — площадь, охваченная контуром. Итак, угол поворота $\Delta\varphi$ просто пропорционален площади обхода, причем коэфициентом пропорциональности служит гауссова кривизна. Выведем теперь важное следствие формулы (628), которое собственно и является теоремой Гаусса-Бонне.

Рассмотрим тот же контур, с тем же полем a и параллельно относимым вектором p; проследим, кроме того, поведение направленного по касательной к контуру вектора t. Вектор t непрерывно меняет свое направление за исключением угловых точек (наш пример M_0 на черт. 131), где он скачком поворачивается на некоторый угол.

Обозначим, как и раньше, через φ угол $\widehat{\mathbf{ap}}$ и через ψ — угол $\widehat{\mathbf{pt}}$. Таким образом

$$\widehat{\mathbf{at}} = \varphi + \psi.$$

Проследим изменение всех этих углов при обходе контура. Так как после обхода векторы **a** и **t** возвращаются в свои прежние положения, то угол $\varphi - \psi$ в процессе обхода может получить приращение только лишь вида $2\pi k$, где k — целое. Мы утверждаем, что в наших предположениях это приращение равно 2π. Действительно, будем непрерывно деформировать нашу поверхность так, чтобы она в конце концов превратилась в плоскость, затем непрерывной деформацией контура переведем его в круг, и непрерывной деформацией поля **a** переведем его в поле векторов, параллельных между собою. В силу непрерывности деформации приращение угла $\varphi + \psi$ будет тоже изменяться непрерывно, но так как оно может меняться лишь скачком на 2π, то вообще будет оставаться без изменения. Так как для окружности поворот вектора **t** по сравнению с постоянным вектором **a** при обходе в положительном направлении равен $+2\pi$, то таким было приращение угла $\varphi + \psi$ и для исходного контура на поверхности (черт. 131) [1]).



Черт. 131.

Итак,

$$\Delta(\varphi + \psi) = 2\pi, \quad \Delta\varphi + \Delta\psi = 2\pi. \tag{630}$$

Займемся теперь приращением $\Delta\psi$ угла ψ. Оно составится из непрерывного изменения ψ вдоль дуг, составляющих контур, и из скачков в угловых точках. Мы можем, следовательно, записать

$$\Delta\psi = \oint d\psi + \sum_{i=1}^{n} \Delta_i\psi. \tag{631}$$

Здесь под интегралом мы понимаем сумму интегралов по n дугам, составляющим наш n-угольный контур, а под $\Delta_i\psi$ — скачок угла ψ (т. е. поворот вектора **t**) в i-й угловой точке. Так как ψ есть угол, образуемый касательной **t** с параллельно переносимым вектором **p**, то $d\psi$ есть бесконечно малый угол геодезического поворота касательной **t** (§ 62). Поэтому интеграл в (631) выражает нам сумму геодезических поворотов касательной **t** вдоль всех дуг, образующих контур; к этому прибавлена сумма поворотов **t** в угловых точках.

Вставляя теперь формулы (628) и (631) в (630), получим теорему Гаусса-Бонне:

$$\iint K\,d\sigma + \oint d\psi + \sum_{i=1}^{n} \Delta_i\psi = 2\pi. \tag{632}$$

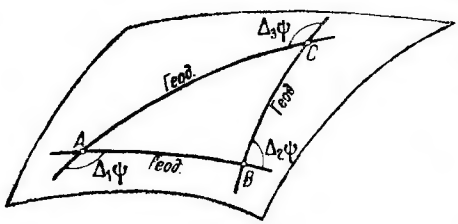
[1]) Разумеется, чтобы стать вполне строгим, это место доказательства нуждается в уточнении.

Отметим интересные частные случаи. Во-первых, пусть контур будет гладким (без угловых точек). Тогда формулу можно переписать в виде

$$\int\int K\,d\sigma + \oint \tilde{k}_{вн}\,ds = 2\pi. \tag{633}$$

Здесь через $\tilde{k}_{вн}$ обозначено $\frac{d\psi}{ds}$; это будет, действительно, внутренняя кривизна контура [см. формулу (559)], снабженная знаком. Формула (633) связывает, таким образом, длину контура и внутреннюю кривизну вдоль него с охваченной им площадью и гауссовой кривизной на ней.

Во-вторых, пусть контур n-угольный и образован дугами *геодезических*. Так как в этом случае вдоль каждой дуги $\mathbf{t}$ переносится параллельно, то угол его геодезического поворота $d\psi$ все время равен нулю. Формула (632) принимает вид



Черт. 132.

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i\psi = 2\pi - \int\int K\,d\sigma. \tag{634}$$

Мы имеем здесь обобщение теоремы планиметрии о сумме внешних углов многоугольника. Роль этих углов играют $\Delta_i\psi$, а роль прямолинейных сторон — отрезки геодезических. В случае $K=0$, когда внутренняя геометрия поверхности совпадает с геометрией плоскости, мы получаем эту теорему в точности.

Применим (634), в частности, к геодезическому треугольнику ($n=3$) (черт. 132). Так как каждый из углов $\Delta_i\psi$ равен π минус соответствующий внутренний угол, то

$$\Delta_1\psi + \Delta_2\psi + \Delta_3\psi = 3\pi - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}).$$

Вставляя в (634), получим

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi + \int\int K\,d\sigma. \tag{635}$$

Сумма углов геодезического треугольника равна двум прямым плюс некоторая поправка, положительная в случае $K>0$ (избыток) и отрицательная в случае $K<0$ (недостаток). В частности, в случае постоянной гауссовой кривизны эта поправка имеет вид

$$K\sigma$$

и пропорциональна площади треугольника σ.